Εξίσωση Dirac και τελεστές καταστροφής και δημιουργίας

Ν. Λυγερός

Lagrange και εξίσωση Dirac

$L = \int d^3\vec{x} L\ (x)$ όπου $L\ (x) = -\bar{\psi}(x)(m + \sum_{\mu=0}^{4} \gamma^{\mu}\partial_{\mu})\psi(x)$

Πεδίο ορμής: $p_{\psi}(\vec{x}) = \frac{\partial L}{\partial(\partial - \psi(\vec{x}))} = \overline{\psi}(\vec{x})\gamma^0, \quad p_{\psi}(\vec{x}) = 0$

Hamilton

$H = \int d^3\vec{x} H\ (\vec{x})$ όπου $H\ (\vec{x}) = p_{\psi}\dot{\psi} - L\ (\vec{x}) = \bar{\psi}(x)\left(m + \sum_{i=1}^{3}\gamma^i\partial_i\right)\psi(x)$

Για να έχουμε την κατάσταση του κενού, αναλύουμε περισσότερο τον φορμαλισμό του Lagrange και του Hamilton:

$L = \bar{\psi}\left(i\partial_t\psi - M\psi\right),\ p_{\psi} = i\bar{\psi}, \quad H = \bar{\psi}M\psi$

Για να ισχύει ο φορμαλισμός, η αντιμεταθετικότητα είναι απαραίτητη.

Έστω $\{\bar{\psi},\psi\} \equiv 1,\ \{\psi,\psi\} = 0 = \{\bar{\psi},\bar{\psi}\}$

Στο χώρο Hilbert έχουμε δύο καταστάσεις όπου

$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ δρουν ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας

Και $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{pmatrix}$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε:

$\left\{\psi_i(x), \psi_j(x')\right\} = 0$

$\left\{\bar{\psi}^i(x)\bar{\psi}^j(x')\right\} = 0$

και $\left\{\bar{\psi}^i(x), \psi_j(x')\right\} = \delta^i_j\delta(x - x')$