La théorie des marchés en tant qu'extension de la théorie des jeux II

P. Gazzano, N. Lygeros

La théorie de la valorisation financière actuelle repose sur les deux principes fondamentaux :

Le premier est le principe de réplication qui consiste à connaitre la valeur actuelle d'un actif dérivé grâce à la valeur d'actifs plus simples. Le portefeuille constitué de ces différents actifs primaires doit répliquer la valeur d'actifs plus complexes. Nous avons donc une forme d'hérédité qui n'est pas un simple transport de structure au sens mathématique du terme.

Le deuxième est l'absence d'opportunité d'arbitrage qui entraîne l'existence d'une mesure de probabilité P, appelée probabilité risque-neutre, et d'un actif $n(t)$, appelé numéraire, tel que pour tout actif financier $S(t)$, $S(t)/n(t)$ est une P-martingale.

La combinaison des deux principes implique que s'il existe un portefeuille de réplication pour un actif dérivé, alors tous les portefeuilles de réplication auront la même valeur. De plus, cette valeur ne dépend pas de la probabilité : si $S(t)$ est le prix d'un actif dérivé, $n(t)$ le numéraire, P et P' deux probabilités associées à l'univers risque-neutre, alors :

$$E_P\left[\frac{S(T)}{n(T)}, F_t\right] = E_{P'}\left[\frac{S(T)}{n(T)}, F_t\right] = \frac{S(t)}{n(t)}$$

Nous allons donner un exemple simple d'une obligation pour illustrer ces deux principes, pour laquelle nous calculons la valeur actuelle comme la somme pondérée des coupons. Les poids sont les coefficients d'actualisation :

$$P_0 = \frac{c}{(1+r)^1} + \frac{c}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1+c}{(1+r)^T}$$

Ainsi, le portefeuille constitué des différents coupons c pondérés par les facteurs d'actualisation réplique à chaque instant l'obligation P :

$$\left\{\left\{\frac{c}{\left(1+r\right)^i}\right\}_{i\in\{1..T\}}, \frac{1}{\left(1+r\right)^T}\right\} \text{ réplique } P$$

Le deuxième principe apparaît implicitement quand nous actualisons au taux r que nous appelons « taux sans risque ». Le numéraire est dans ce cas $\left(1+r\right)^i$, c'est-à-dire la capitalisation d'un flux unitaire, bien qu'ici la martingale n'apparaisse pas car les taux sont déterministes, mais nous pouvons écrire le prix de l'obligation P comme la somme suivante :

$$P_0 = \sum_{i=1}^{T} E_P\left[\frac{c}{\left(1+r_t\right)^i}\right] + E_P\left[\frac{1}{(1+r_t)^T}\right]$$

D'une manière générale, la réplication d'actif entraîne un calcul de la forme $E_P\left[f(r_t)\Phi\right]$ où f est fonction du taux r_t et Φ_t est fonction F_T-mesurable de l'actif sous-jacent S_t stochastique. La difficulté apparaît lorsque le taux est stochastique car la source d'incertitude apparaît à la fois dans le flux de payement et dans l'actualisation. Supposons qu'un actif dérivé f_t dépende du taux stochastique r_t, alors la valeur actuelle f_0 est l'espérance des valeurs actualisées du versement futur $E_P\left[f(r(t))\Phi\right]$. Mais comme $r(t)$ n'est pas déterministe, nous ne pouvons pas dire [i]

$$E_P\left[f(r(t))\Phi(t)\right] = f(r(t))E_P\left[\Phi(t)\right]$$

Il est donc nécessaire d'introduire un ensemble dans lequel tous les actifs financiers actualisés à ce taux r_t deviennent équivalents, partageant ainsi la même source d'incertitude. Ce taux devient alors le nouveau taux de référence. Pour deux actifs financiers actualisés au taux stochastique r_t, ce taux devient le nouveau taux sans risque et dont il nous est permis de le considérer comme du bruit. En transportant ce calcul dans ce nouvel ensemble, nous effectuons une opération mathématique de quotient. Le théorème de Radon-Nikodym nous permet de traduire ce schéma mental d'un point de vue mathématique :

Considérons un numéraire $X(t)$ qui soit une P-martingale dans l'univers risque-neutre associé au numéraire $n(t)$. Nous pouvons alors définir la mesure Q_X associée à $X(t)$ par le produit de la mesure P par la fonction $\dfrac{X(t)}{n(t)X(0)}$:

$$Q_X = \frac{X(t)n(0)}{n(t)X(0)}P$$

Nous pouvons définir un nouvel univers associé à Q_X, dans lequel tout actif qui possède un portefeuille de réplication dans l'univers risque neutre associé à P possède le même portefeuille de réplication dans Q_X. Ce nouvel univers s'appelle l'univers forward-neutre. Ceci nous permet d'effectuer une opération à l'instar d'un changement de base qui autorise une interprétation plus simple et surtout plus efficace des données. Il en découle que nous pouvons considérer la formule de passage d'un univers à l'autre, où nous faisons apparaître le nouveau numéraire $X(t)$:

$$f(0) = n(0)E_P\left[\frac{f(t)}{n(t)}\right] = E_{Q_X}\left[\frac{f(t)}{n(t)}\frac{dQ}{dP}\right] = E_{Q_X}\left[\frac{f(t)}{n(t)}\frac{n(t)X(0)}{X(t)}\right] = X(0)E_{Q_X}\left[\frac{f(t)}{X(t)}\right]$$

donc

$$\frac{f(0)}{X(0)} = E_{Q_X}\left[\frac{f(t)}{X(t)}\right]$$

Reprenons alors l'exemple donné plus haut, plaçons-nous dans l'univers forward–neutre. Dans cet univers, $\frac{\Phi_t}{f(r_t)}$ est une Q-martingale :

$$E_Q\left[\frac{\Phi_t}{f(r_t)}\right]=\frac{\Phi_0}{f(r_0)}$$

et nous retrouvons dans cet univers le résultat pour une option sur action dans un univers risque-neutre.

La complexité technique rend efficace cette approche classique, car elle consiste à éliminer la source de risque secondaire, la source de risque représentée par l'actualisation, et à ne conserver que le noyau, c'est-à-dire la source de risque représentée par l'actif sous-jacent r_t. Le taux d'actualisation r_t devient dans l'univers forward-neutre le nouveau taux sans risque.

---

[i] Comme dans le cas du modèle de Black&Scholes pour une option de maturité T sur action simple où $C_0 = E\left[e^{-rT}\max(S_T-K;0)\right]=e^{-rT}E\left[\max(S_T-K;0)\right]$