Από το Λήμμα του Ευκλείδη στο Λήμμα του Gauss

Ν. Λυγερός

Στη στοιχειώδη θεωρία αριθμών το Λήμμα του Ευκλείδη παίζει έναν σημαντικό ρόλο, διότι επιτρέπει την απόδειξη του θεωρήματος της παραγοντοποίησης των αριθμών. Είναι βασικό να είναι γνωστό στους μαθητές που θέλουν να κατανοήσουν τα δομικά στοιχεία της θεωρίας.

Λήμμα του Ευκλείδη:

$$\forall(\alpha,b)\in\mathbb{N}^2, \forall p\in\Pi, \left(p|ab\right)\Rightarrow\left(p|a\vee p|b\right)$$

Ένας αποτελεσματικός τρόπος να προσεγγίσουμε την απόδειξη του Λήμματος είναι να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική του Grothendieck και να το γενικεύσουμε.

Μια φυσιολογική γενίκευση είναι το Λήμμα του Gauss, το οποίο δεν περιορίζεται στο σύνολο των πρώτων αριθμών.

Λήμμα του Gauss: $\forall(a,b,d)\in\mathbb{Z}^2, \left(a|bc\wedge\left(a\perp b=1\right)\right)\Rightarrow\left(a|c\right)$

Η προσέγγιση του Λήμματος μπορεί να γίνει μέσω του θεωρήματος του Bézout, το οποίο επιλύει διοφαντικές εξισώσεις πρώτου βαθμού.

Θεώρημα Bézout: $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^{2x}, \exists(x,y)\in\mathbb{Z}^2 / xa+yb=a\perp b$

Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη δίνει μία εύκολη απόδειξη. Κατά συνέπεια, είναι άμεσα χρησιμοποιήσιμο για την απόδειξη του Λήμματος του Gauss.

Μέσω του θεωρήματος του Bézout έχουμε $xa+yb=1$.

Έστω c διαφορετικό του 0, τότε $x\cdot a\cdot c+ybc=c$

Όπως $a|bc, \exists k\in\mathbb{Z} / bc=ka$ άρα έχουμε

$$xac+yka=c=\left(xc+yk\right)a$$

Κατά συνέπεια, $a|c$

Σε αυτό το νέο πλαίσιο, η απόδειξη του Λήμματος του Ευκλείδη γίνεται με το εξής τρόπο.

Εάν $p|a$ τότε δεν υπάρχει πρόβλημα. Καθώς p είναι πρώτος αριθμός έχει ως διαιρέτες μόνο 1 και p. Άρα είναι πρώτος με τον αριθμό α. Αυτό σημαίνει ότι βρισκόμαστε πλέον στις συνθήκες του Λήμματος του Gauss. Κατά συνέπεια, ο πρώτος αριθμός p διαιρεί τον αριθμό b.

Αυτή η παρουσίαση δεν είναι μοναδική βέβαια, αλλά μας επιτρέπει να διδάξουμε στους μαθητές τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ μαθηματικών οντοτήτων, για να κατανοήσουν την στρατηγική που μπορούν να αναπτύξουν για να δομήσουν την μαθηματική τους σκέψη.