Συνάρτηση του Riemann, συνάρτηση του Ramanujan
και L- συνάρτηση δευτέρου βαθμού

Ν. Λυγερός

Έστω η συνάρτηση του Riemann: $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ για $R(s)>1$

Μέσω της ισότητας του Euler έχουμε: $\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}$

Ο Riemann απέδειξε ότι υπάρχει αναλυτική προέκταση στους μιγαδικούς:

$\Lambda(s):=\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$

Μέσω της συνάρτησης Γ(x) του Euler. Απέδειξε επίσης την ισότητα:

$\Lambda(s)=\Lambda(1-s)$

Η υπόθεση του Riemann έχει ως εξής: $\forall s/1(s)=0\Rightarrow R(s)=\frac{1}{2}$

Μέσω της προσέγγισης του Dirichlet για την μελέτη των πρώτων αριθμών σε αριθμητική πρόοδο, βρίσκουμε τις επεκτάσεις του. [βλ. OPUS (1998)]

Έστω ο πρωτογενής χαρακτήρας του Dirichlet $\chi(n)$modulo q:

$\chi(mn)=\chi(m)\chi(n),\chi(1)=1,\chi(m+bq)=\chi(m)$

Τότε ορίζουμε τη L- συνάρτηση.

$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}=\prod_{p}\left(1-\chi(p)p^{-s}\right)^{-1}$

Ανάλογο μα την προηγούμενη προσέγγιση έχουμε:

$\Lambda(s,\chi):=\pi^{-(s+a_\chi)/2}\Gamma\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right)L(s,\chi)=\varepsilon_\chi q^{\frac{1}{2}-s}\Lambda(1-s,\overline{\chi})$

όπου $a_\chi=\left(1+\chi(-1)\right)/2$ και ε_χ πρόσημο αθροίσματος του Gauss.

Οι συναρτήσεις $L(s,\chi)$ αποτελούν όλες τις L-συναρτήσεις πρώτου βαθμού.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση L-συναρτήσεων δευτέρου βαθμού.

Έστω η διακρίνουσα: $\Delta(z)=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi inz}\right)^{24}$

Έχουμε την ιδιότητα: $\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi inz}$

Όπου $\tau(n)$ είναι η συνάρτηση του Ramanujan [βλ. OPUS (2010)]

Για $a,\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}\in\mathbb{Z}$ και $ad-bc=1$: $\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^{12}\Delta(z)$

Ανάλογα έχουμε: $L(s,\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{11/2}}n^{-s}=\prod_{p}\left(1-\frac{\tau(p)}{p^{11/2}}p^{-s}+p^{-2s}\right)^{-1}$

Τότε βρίσκουμε $\Lambda(s,\Delta):=\Gamma_{\mathbb{R}}\left(s+\frac{11}{2}\right)\Gamma_{\mathbb{R}}\left(s+\frac{13}{2}\right)L(s,\Delta)=\Lambda(1-s,\Delta)$

όπου $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$.