Construction de posets dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à un groupe donné

N. Lygeros, M. Mizony

Résumé : Dans cette Note, nous démontrons le théorème suivant : Si G est un groupe fini de cardinal n, non produit direct de 2 groupes, engendré par des éléments d'ordre deux à deux distincts, alors il existe un poset dont le groupe d'automorphisme est isomorphe à G et dont le cardinal est égal à 3n. Ce théorème est optimal pour les groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Construction of posets which automorphism group is isomorphic to a given group

Abstract : In this Note, we prove the following theorem : If G is a finite group of cardinal n, non direct product of 2 groups, generated by elements which are two by two of distinct order then there exists a poset which automorphism group is isomorphic to G and which cardinal is equal to 3n. This theorem is optimal for the groups $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Introduction

Soient G un groupe fini ($|G| = n$) et P un poset (ensemble partiellement ordonné) fini ($|P| = n\,;$). D'après un théorème de G. Birkhoff (cf. [1]) nous savons que pour tout groupe G fini donné il existe un poset P dont le groupe d'automorphismes $AutP$ est isomorphe au groupe G (donc $AutP \sim G$). De plus G. Birkhoff (cf. [1]) dans un autre théorème explicite la taille d'un poset en fonction du cardinal du groupe : $p = n^2 + n$. Seulement cette valeur n'est pas optimale. En effet dans une précédente Note (cf. [2]) nous avons montré que pour les groupes cycliques premiers de cardinal $n = 3$, ou 7 la valeur minimale est égale à $3n$ et que pour ceux de cardinal supérieur à 11 elle est égale à $2n$. Le but de cette Note est d'améliorer la valeur donnée par G. Birkhoff pour une classe plus vaste de groupes finis et ce de manière constructive.

Théorème. - Si G est un groupe fini de cardinal n, non produit direct de 2 groupes, engendré par des éléments d'ordres deux à deux distincts, alors il existe un poset dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G et dont le cardinal est égal à $3n$.

Démonstration. - Soit G un groupe fini donné, considérons une des présentations de G. Soit A l'ensemble de ses générateurs. Le graphe de Cayley $\Gamma(G, A)$ (cf. [3]) de G par rapport à A est un graphe étiqueté, orienté et défini comme suit : l'ensemble de ses sommets est G, et l'ensemble de ses étiquettes est A. Il y a une arête orientée, étiquetée x de g_1 à g_2 si et seulement si $g_1 x = g_2$. Et le groupe d'automorphismes (comme graphe orienté et étiqueté) de ce graphe de Cayley est isomorphe au groupe G. Comme le groupe G n'est pas produit direct de deux groupes, le graphe de Cayley est connexe. Ensuite nous dilatons chacun des sommets de ce graphe de Cayley pour y plonger une 3-chaîne (ensemble totalement ordonné à 3 éléments) de la manière suivante.

Pour chaque sommet l'on peut faire une partition des arêtes qui l'atteignent : les rentrantes et les sortantes. Au point de l'élément le plus bas de la 3-chaîne on joint toutes les arêtes sortantes et au point du plus haut élément on joint toutes les arêtes rentrantes. Cette procédure permet de transformer le graphe de Cayley en un poset étiqueté sans avoir ajouté des arêtes de transitivité et sans avoir modifié le groupe d'automorphismes dans la composition puisque les 3-chaînes sont rigides et que les orbites des points centraux des 3-chaînes sont celles des points initiaux dilatés. Dans cette procédure nous n'étiquetons pas les arêtes des 3-chaînes introduites.

Soient a_1 et a_2 deux générateurs du groupe G, d'ordre différents h_1 et h_2. Soient ϕ un automorphisme de posets et x_{a_1} et x_{a_2} deux des étiquettes du poset étiqueté obtenu précédemment. Par abus de langage nous appellerons cycle les cycles de 3-chaînes. Un cycle de 3-chaînes est un cycle dont on a dilaté les sommets pour y introduire les 3-chaînes - voir construction précédente. Ainsi un cycle de 3-chaînes est un poset. Supposons maintenant que $\phi(x_{a_1}) = x_{a_2}$; alors les cycles associés à $x_{a_i}x_{a_j}x_{a_1}$ sont envoyés sur ceux associés à $\phi(a_i)\phi(a_i)\phi(a_1)$. Or la multiplication se faisant à droite le produit doit être de la forme $\phi(a_i)\phi(a_i)a_2$, donc $\phi(a_1) = a_2$. Ainsi les h_{a_1}-cycles sont envoyés sur les h_{a_2}-cycles ; absurde. Donc ϕ conserve les étiquettes.

Corollaire. - Si $G \sim G_1 \times G_2$ où G_1 et G_2 sont des groupes finis de cardinaux respectifs n_1 et n_2, alors il existe un poset dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G et de cardinal $3(n_1 + n_2)$.

Démonstration. - Les groupes G_1 et G_2 vérifient les hypothèses du théorème ; ainsi pour G_1 et G_2 il existe deux posets P_1 et P_2 tels que $Aut(P_1) \sim G_1$ et $Aut(P_2) \sim G_2$. Ensuite nous joignons P_1 à P_2 de façon que de chaque point de P_1 partent des flèches qui atteignent tous les points de P_2. Ainsi les 2 groupes d'automorphismes n'interfèrent pas. De cette manière on obtient un poset P tel que : $Aut(P) \sim Aut(P_1) \times Aut(P_2) \sim G_1 \times G_2 \sim G$ et dont le cardinal est égal à $|P| = |P_1| + |P_2| = 3n_1 + 3n_2 = 3(n_1 + n_2)$.

Commentaires

1) Pour les groupes symétriques S_n, il est trivial de voir que le poset minimal recherché est l'antichaîne à n éléments.
2) Pour les diédraux D_n (sauf pour $D_3 = S_3$) il est facile de voir que la couronne orientée à $2n$ éléments est minimale.
3) Notre méthode de construction générale ne peut concerner le groupe des quarternions Q_4 qui est défini par générateurs et relations ($a^4 = 1, b^2 = a^2, b = aba$) non seulement parce que les générateurs a et b ont le même ordre, mais surtout parce que l'on peut définir un morphisme ϕ tel que $\phi(a) = b$. qui ne provient pas d'un morphisme de poset étiqueté.
4) En revanche notre méthode est optimale pour les groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (cf. [2]). Et nous allons montrer qu'elle l'est aussi pour le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Lemme. - Si $G \sim \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors le plus petit poset (suivant le cardinal) dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à $Z/4Z$ est de cardinal 12.

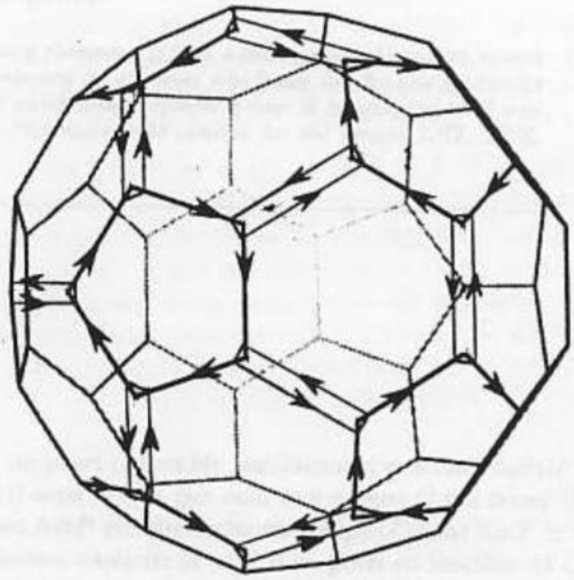
Schéma de démonstration. - Les orbites sont représentées par des antichaînes (i.e. dans le diagramme de Hasse les éléments de l'orbite sont à la même hauteur). Si O est une orbite de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. alors $|O||4$ donc nous avons soit $|O| = 1$, soit $|O| = 2$, soit $|O| = 4$. Par la minimalité du poset les orbites telles que $|O| = 1$ sont exclues. Et le poset a au moins une orbite de cardinal 4 pour représenter l'orbite du générateur de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Celle-ci étant une antichaîne son groupe d'automorphismes est S_4 et donc elle doit nécessairement être associée à une autre orbite. A présent s'il existe un poset vérifiant la propriété recherchée et de cardinal strictement inférieur à celui obtenu par notre méthode, il ne peut être constitué que d'orbites dont la partition des cardinaux est parmi les formes suivantes : 4+2, 4+2+2, 4+2+2+2, 4+4, 4+4+2. Une élude systématique de chaque cas montre que le groupe d'automorphismes est de cardinal strictement supérieur à 4.

Questions

1) Notre méthode est-elle optimale pour les groupes $\mathbb{Z}/q^\alpha\mathbb{Z}$ où q est un nombre premier ?
2) Notre méthode permet de construire un poset (cf.fig.) à 180 éléments (au lieu des 3 660 utilisés par la méthode de G. Birkhoff) dont le groupe d'automorphismes est isomorphe au groupe alterné A_5 (cf. [4], [5]). Cette construction pour ce groupe simple est-elle optimale ?

Apres la rédaction de cette Note notre rapporteur S. Bouc nous a signalé l'existence d'un poset à 106 éléments dont le groupe d'automorphismes est isomorphe au groupe alterné A_5.

Ce travail a été financé en partie par le CNRS. Projet Médicis.



Poset associé au groupe A_5.
A_5 group's associated poset.

Références bibliographiques

[1] **Birkhoff G., 1946**. Sobre los grupos de automorfismos. *Revista Union Math*, Arg. 11. p. 155-157.
[2] **Chaunier C. et Lygeros N., 1994**. Posets minimaux ayant un groupe d'automorphismes d'ordre premier. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 318. série 1. p. 695-698.
[3] **Epstein D., 1992** *Word Processing in Groups*. John and Barlett Publishers. Boston.
[4] **Kargapolov M. et Merzliakov Iou., 1985.** *Eléments de la théorie des groupes*. Mir. Moscou.
[5] **Conway J.H.** et al, **1985**. *ATLAS of finite groups*. Clarendon Press. Oxford.