La théorie des marchés en tant qu'extension de la théorie des jeux IV

P. Gazzano, N. Lygeros

En théorie des marchés, une manière classique pour connaître la valeur actuelle d'un actif est d'actualiser la valeur future au taux sans risque. Dans l'axiomatique de la théorie des décisions où les agents sont rationnels, la valeur d'un même actif entre deux dates ne sera pas la même, toute chose égale par ailleurs. En effet, dans un avenir toujours incertain les agents ont une préférence pour le présent : ils préfèrent acheter ou vendre maintenant que plus tard. Par conséquent, la valeur d'un actif sera d'autant plus faible que l'on sera proche du présent. Ce résultat découle directement d'un raisonnement par arbitrage, mais il est possible de trouver un équivalent en théorie des jeux. Cet équivalent est représenté par l'analyse rétrograde, ou "backward induction", définie par von Neumann et Morgenstern dans leur ouvrage "*Theory of Games and Economic Behavior*" :

Now a plausible step suggests itself for the mathematical analysis of the game Γ, which is entirely in the spirit of the method of "complete induction", widely used in all branches of mathematics. It replaces, if successful, the analysis of Γ by the analysis of other games which contain on move less than Γ. This step consists in choosing a $\bar{\sigma}_1 = 1,....,\alpha_1$ and denoting by a game which agrees with Γ in every detail except that the move M_1 is omitted, and instead the choice is dictated (by the rules of the new game) the value $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$. $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ has indeed one move less that Γ. Its moves are $M_2,...,M_v$. And our inductive step will have been successful if we can derive the essential characteristics of Γ from those of all $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}, \bar{\sigma}_1 = 1,...,\alpha_1$.

En plaçant les agents dans un tel jeu, on considère que $E\left[S_T\right]$ est le résultat obtenu en un point terminal du jeu $t_n = T$. Les temps intermédiaires $t_1,....,t_{n-1}$ représentent les nœuds du jeu pour lesquels les joueurs vont devoir effectuer leur décision quant au choix du taux pour actualiser la valeur de l'actif. Etant donné que l'actualisation entraine nécessairement une perte de la valeur, le joueur va chercher à chaque coup à minimiser cette perte de valeur.

$$\frac{E[S_T]}{(1+r_{T,t_{n-1}})^{T-t_{n-1}}(1+r_{t_{n-1},t_{n-2}})^{T-t_{n-2}}....(1+r_{t_2,t_1})^{t_2-t_1}}$$

Lorsque l'on suppose que les taux sont égaux en chaque nœud, on obtient alors :

$$V_0 = (1+r)^{-T} E[S_T]$$

Ainsi, partant de la valeur espérée $E\left[S_T\right]$ d'un actif S_t, nous pouvons en déduire la valeur actuelle. En inversant le résultat ci-dessus nous retrouvons la formule de la capitalisation. Nous considérons alors qu'un des joueurs est en situation d'emprunteur, alors que l'autre joueur se trouve en situation de prêteur. L'actualisation permet ainsi de compenser la différence entre la situation financière du prêteur et celle que ce dernier aurait pu attendre s'il n'avait pas prêté.

Cependant, ce résultat impose une hypothèse restrictive sur le jeu Γ :

In order to be able to form the entire sequence of games,

$$\Gamma, \Gamma_{\bar{\sigma}_1}, \Gamma_{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2}, ..., \Gamma_{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, ..., \bar{\sigma}_\nu}$$

of $1, 2, ..., \nu$ *moves respectively, it is necessary and sufficient that in the game preliminarity and anteriority should coincide, i.e that perfect information should prevail. If* Γ *is a zero-sum two person game, then this permits the elucidation of* Γ *by going through the sequence backwards, from the trivial game, to the significant game.*

D'un point de vue de la théorie des marchés, cela implique l'existence en chaque nœud d'un taux sans risque, mais surtout que ce taux soit identique pour tous les agents. Par conséquent, le taux sans risque représente est un taux d'équilibre qui permet au prêteur de maximiser le gain de son prêt, mais qui permet aussi à l'emprunteur de minimiser le coût de son emprunt.