Notes sur la dérivée de Lie

N. Lygeros

La dérivée de Lie est l'unique application linéaire de $\Omega M \to \Omega M$ qui vérifie les conditions suivantes : $\Im_X$ préserve le degré. $\Im_X$ est une dérivation de l'algèbre ΩM . $\Im_X$ et d commutent. Comme s'il s'agit d'une dérivation, elle est linéaire $D\left(\lambda f+g\right)=\lambda D(f)+D(g)$ et vérifie la formule de Leibniz : $D\left(fg\right)=fD(g)+gD(f)$

Si V est une variété différentielle et, X et Y deux champs de vecteurs sur V alors $\Im_X\Im_Y-\Im_Y\Im_X$ est une dérivation.

$\Im_{[X,Y]}=\Im_X\Im_Y-\Im_Y\Im_X=\Im_{\Im_X Y}=-\Im_{\Im_Y X}$

Dans le cadre de la convention d'Einstein, nous avons :

$$[X,Y]=X\left(Y^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)-Y\left(X^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)=\left(X^b\frac{\partial Y^a}{\partial x^b}-Y^b\frac{\partial X^a}{\partial x^b}\right)\frac{\partial}{\partial x^a}$$

Si la variété est munie d'une structure riemannienne, nous avons :

$\Im_X f(p)=X_p.f=<X\mid\nabla f(p)>$

Il est possible d'interpréter la dérivée de Lie à l'aide de la formule de Cartan :

$\Im_X=i_X d+di_X$

Une fois appliquée, nous avons :

$\Im_{fX}\omega=f.\Im_X\omega+df\wedge i_X\omega$