Un problème de reconstruction de poset

N. Lygeros

En classifiant les posets selon la cardinalité des degrés de leurs sommets, nous nous retrouvons dans un problème de partitions conditionnelles. Le nombre de sommets étant fixe, il ne suffit pas pour déterminer l'existence d'un poset donné. Cela n'est bien sûr, problématique, que dans les bords de la fonction unimodale du nombre d'arêtes en fonction du nombre de relations dans le poset. Par exemple, une des premières partitions possibles pour un poset à n éléments et r relations, est du type suivant :

Par exemple pour n = 3 et r = 2, nous avons :

2	2	0

Or cette partition représente, non pas un poset ou un graphe mais un multigraphe à savoir :

En d'autres termes, nous avons à considérer un problème de reconstruction à la Fraïssé.

Reprenons donc les éléments de cette problématique avec cette nouvelle vision.

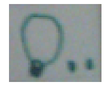
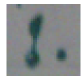
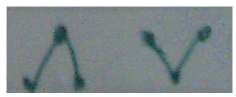
Étant donné un nombre de sommets donnés, existe-t-il toujours un poset de cette taille ? La question admet deux solutions triviales, puisque l'antichaine et la chaine à n éléments sont des posets.

Étant donné un nombre de sommets donné et un nombre de relations donné, existe-t-il un poset avec ces propriétés.

Cette question n'est plus triviale mais elle demeure élémentaire. Cette fois le critère discriminant est le nombre $\frac{n(n-1)}{2}$. En effet, si le nombre de relations est strictement plus grand que ce nombre, il n'existe pas de tel poset et même de graphe.

Si ce nombre est inférieur, alors il existe toujours un poset ayant n sommets et r arêtes. Nous remarquons que la donnée de n et de r, ne permet pas de faire de différence entre les posets et les graphes. Comme l'ensemble des posets est un sous-ensemble de l'ensemble des graphes, il est intéressant de rechercher un critère discriminant pour les posets. Voyons donc si la partition des degrés des sommets permet de donner un élément de réponse.

Dans le cas de n = 3, nous avons :

r = 0	$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$	Oui, Antichaine
r = 1	$\boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}$	Oui/Non Poset/Multigraphe 
	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}$	Oui 
r = 2	$\boxed{3}\boxed{1}\boxed{0}$	Non car $d \leq 2$
	$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{0}$	Non multigraphe
	$\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1}$	Oui 
r = 3	$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{0}$	Non car $d \leq 2$
	$\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$	Non car $d \leq 2$
	$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$	Oui chaine

Nous remarquons que seul le cas du graphe réflexif pourrait nous interroger mais comme la relation d'ordre des posets n'est pas *transitif/transitive, il n'existe pas de problème. Pour n = 3, les partitions réelles sont donc :

$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}$ $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1}$ et $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$

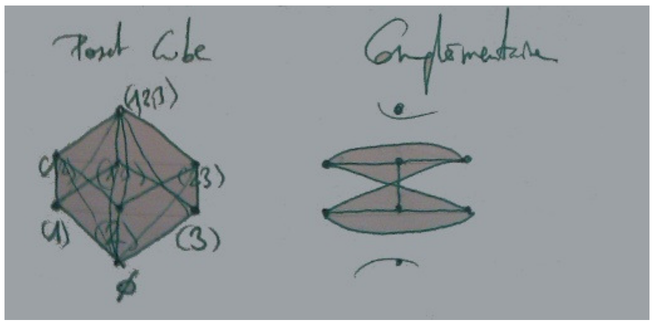
Les conditions nécessaires sont donc

$n, \quad r \leq \frac{n(n-1)}{2}$ et $d \leq r$

aussi bien pour les posets que les graphes.

Comme cette approche élémentaire ne permet pas d'aboutir rapidement, considérons le problème de manière plus générale. La différence entre les posets et les graphes se situe au niveau des cycles. Mais cette différence n’est pas suffisante. En effet, si le graphe ne possède pas de cycle de taille supérieure à trois, il est possible de remplacer les 3-cycles par des 3-chaînes sans modifier les degrés au niveau local aussi il est nécessaire d'avoir une approche globale afin de considérer les répercussions du remplacement par la 3-chaîne. Car la modification s'effectue aussi sur le nombre d'arêtes. Il n'y a que dans le cas particulier des arbres que nous avons une invariance sur le degré des sommets, puisqu' il suffit d'opposer le sens des arêtes consécutives de l'arbre pour obtenir une orientation compatible avec la notion de poset.

Cela nous amène à considérer la notion de complémentaire d'un poset ou plutôt son absence. En effet, si le complémentaire d'un poset est un poset, alors ceci est équivalent au fait que le poset a une dimension au plus égale à deux. Il s'agit du théorème de Dushnik-Miller. Dans notre cas, nous voulons un poset dont le complémentaire ne soit pas un poset. Celui-ci nous fournira un graphe avec une partition qui ne sera pas un poset. Considérons par exemple le poset cube.

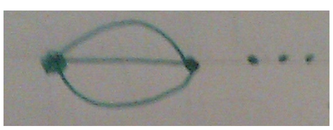


La partition est la suivante

3 3 3 3 3 3 0 0 …

Nous remarquons tout d'abord que la partition représente un multigraphe

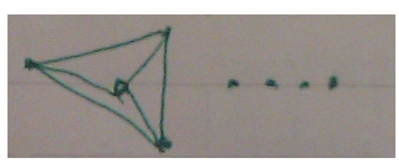
3 3 0 0 0 …



Tandis que la partition ne représente pas un multigraphe

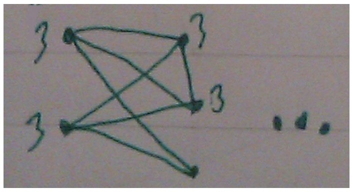
3 3 3 0 0 0 …

La partition 3 3 3 3 0 0 …

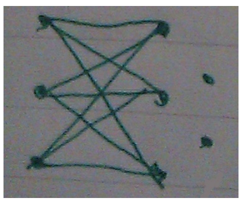
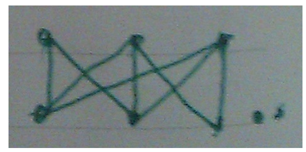
est possible via une sous chaine à 4 éléments  …. (ou k4….)

La partition

3	3	3	3	3	0	0	…



La partition $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{0}$… est possible

 Voici le diagramme de Hasse du poset : 

(ou k3,3 ..)