

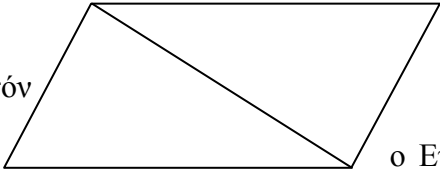
Εφαρμογή της Αξιοματικής Μεθόδου στις θεωρίες μέτρου και ολοκληρώματος (Κ. Καραθεοδωρή)

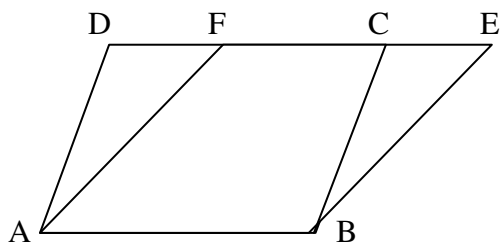
Μετάφραση: Ν. Λυγερός

Είναι ο σκοπός μας να μελετήσουμε τις θεωρίες μέτρου και ολοκληρωμάτων με την αξιωματική μέθοδο που περιγράψαμε.

Στην περίοδο του δεκάτου ενάτου αιώνα, σε μεγάλο βαθμό υπό την επιρροή του έργου του Hermann Grassmann (1809-1877), αναπτύχθηκε η θεωρία των πολυδιάστατων χώρων. Επιπλέον, ο George Cantor (1845-1918) δημιούργησε την γενική θεωρία των συνόλων αλλά και τη θεωρία των συνόλων σημείων. Με τη χρήση αυτών των δύο θεωριών, ήταν δυνατόν να δημιουργηθεί μία πολύ πλήρη θεωρία του μέτρου και των ολοκληρωμάτων, ικανή να γενικευτεί σε θεαματική έκταση και εφαρμογή. Τα αντικείμενα από τα οποία θέλουμε να βρούμε το μέτρο, σε όλες αυτές τις γενικεύσεις, είναι σύνολα από αμείωτες οντότητες, τις οποίες ονομάζουμε *αφαιρετικούς χώρους*, όπως λέμε και τα στοιχεία τους *σημεία* – σύμφωνα με τον ορισμό του Ευκλείδη: Σημείον ἐστὶν οὐ μέρος οὐθέν (στα ελληνικά στο κείμενο).

Σε τρομερή αντίθεση, η παλαιότερη γνωστή θεωρία μέτρου στα μαθηματικά, η οποία εμπεριέχεται στο πρώτο, δεύτερο και δωδέκατο βιβλίο του Ευκλείδη, βασίζεται σε εντελώς διαφορετικές αρχές. Παραδείγματος χάρη, ένα παραλληλόγραμμο χωρίζεται σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα μέσω της κατασκευής μίας από τις διαγώνιους του.

και είναι με αυτόν
τον τρόπο που  ο Ευκλείδης αποδεικνύει (Βιβλίο I, θεώρημα 34) ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι δύο φορές το εμβαδόν από κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα. Η ανάλογα, με τη χρήση του σχεδίου



Αποδεικνύεται (θεώρημα 3Γ) ότι δύο παραλληλόγραμμα ABCD και ABEF που έχουν ίδια βάση και ίδιο ύψος, έχουν ίδια εμβαδά.

Τώρα, είναι αδύνατον να δούμε γεωμετρικά σχήματα, που πρέπει να κοπούν με αυτόν τον τρόπο, ή να ενωθούν με αυτόν τον τρόπο, ως σύνολα σημείων. Για να μπορέσει να το κάνει κάποιος, πρέπει πρώτα να αποφασίσει αν τα σημεία των πλευρών ενός τριγώνου πρέπει να θεωρηθούν ότι ανήκουν στο τρίγωνο ή αν προτιμά να θεωρεί το τρίγωνο ως όλο το εσωτερικό του μόνο $\circ$ και κάθε επιλογή τέτοιου τύπου οδηγεί σε μία αντίφαση:

παραδείγματος χάρη, στην κατασκευή ενός παραλληλογράμμου ενώνοντας δύο τρίγωνα μαζί (πρώτη εικόνα), μία από τις διαγώνιους θα μετρηθεί δύο φορές, ή θα λείπει εντελώς, ανάλογα με την επιλογή που έγινε.

Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα αποτελέσματα του Ευκλείδη και αυτά τα μοντέρνας θεωρίας μέτρου είναι σύμφωνα αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το σύνολο των σημείων του εσωτερικού ενός στοιχειώδους γεωμετρικού σχήματος με την έννοια του Ευκλείδη, έχει πάντα το ίδιο μέτρο με τα σύνολα που κατασκευάζονται όταν προσθέτουμε στα σημεία του εσωτερικού, τα σημεία του ορίου του σχήματος. Όμως αυτή η επίπονη διαδικασία δεν δείχνει την κοινή πηγή από την οποία προήλθαν οι δύο θεωρίες. Από την άλλη πλευρά, οι έννοιες τις οποίες θα εξετάσουμε είναι ειδικά φτιαγμένες για την καθιέρωση μιας γενικής θεωρίας μέτρου, μία η οποία εμπεριέχει ως ειδικές περιπτώσεις όχι μόνο τη θεωρία του Ευκλείδη αλλά και την πιο γενική θεωρία μέτρου που αναπτύχθηκε αυτόν τον αιώνα.