Στοιχειώδη θεωρία των Somas (Κ. Καραθεοδωρή)

Μετάφραση Ν. Λυγερός

Για να προετοιμάσουμε τη συνέχεια, πρέπει να δημιουργήσουμε αφαιρετικές οντότητες που έχουν τις ιδιότητες που να ικανοποιούν, από την μία πλευρά, τα υποσύνολα ενός δεδομένου αυθαίρετου συνόλου στοιχείων και από την άλλη πλευρά, τα σχήματα της στοιχειώδους γεωμετρίας. Θα ονομάσουμε αυτά τα αντικείμενα *somas* (τὸ σῶμα, στα ελληνικά στο κείμενο) και θα τα σημειώνουμε με κεφαλαία πλάγια γράμματα, *A, B,* ... Όλα τα somas που εμφανίζονται σε κάθε δοσμένη έρευνα θα πρέπει πάντα να αποτελούν ένα σύνολο, το οποίο θα σημειώνουμε $_0$. Αυτό σημαίνει ότι τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων – και, ειδικά το αξίωμα επιλογής – εφαρμόζονται στα υποσύνολα το $_0$.

Στη στοιχειώδη γεωμετρία, κάποιος ξεχωρίζει ξεκάθαρα την περίπτωση στην οποία δύο δοσμένα σχήματα επικαλύπτονται, από την περίπτωση όπου δεν γίνεται, στην δεύτερη περίπτωση, θα λέμε ότι τα δύο σχήματα είναι ανεξάρτητα. Δύο υποσύνολα ενός δεδομένου συνόλου, μπορούν και αυτά να ονομαστούν «ανεξάρτητα», όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Για κάθε δύο somas *A, B* του $_0$, ορίζουμε ότι πάντα μπορούμε να αποφασίσουμε αν είναι ή όχι *ανεξάρτητα*. Ενώ οι δύο περιπτώσεις στις οποίες αναφερθήκαμε, η λέξη «ανεξάρτητα» έχει την έννοια που δίνεται από τις αισθήσεις της όρασης ή της αφής, αυτή η λέξη δεν θα έχει τέτοιες συνεκδοχές για μας στο παρόν πλαίσιο. Θεωρούμε την ανεξαρτησία ως μια καθαρά αφαιρετική σχέση μεταξύ των somas που έχει την ιδιότητα που παρουσιάζεται πιο κάτω. Αν δύο somas *A* και *B* είναι ανεξάρτητα, γράφουμε

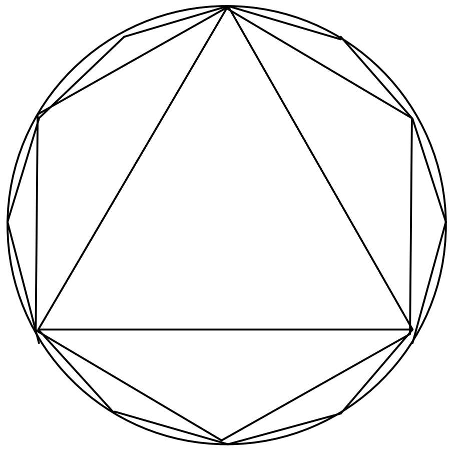
$$A \mathrm{o} B \quad (3.1)$$

και ζητούμε αυτή η σχέση να είναι *συμμετρική*, δηλαδή οι τύποι $A\mathrm{o}B$ και $B\mathrm{o}A$ αντιπροσωπεύουν την *ίδια* σχέση.

Τώρα θεωρούμε σύνολα απαριθμήσιμα με somas δυαδικά ανεξάρτητα $A_1, A_2,$ ... Με κάθε τέτοιο σύνολο από somas θα συνδυάσουμε ένα μοναδικό soma *A*, το οποίο θα ονομάσουμε το *άθροισμα* των somas A_j. (Το πεδίο των σχημάτων της στοιχειώδους ευκλείδειας γεωμετρίας μπορεί να επεκταθεί προσθέτοντας πιο γενικά σχήματα με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί και αυτήν τη συνθήκη). Το άθροισμα των ανεξάρτητων συνόλων και το άθροισμα των ανεξάρτητων στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων είναι, και πάλι, έννοιες που σχετίζονται με την όραση ή την αφή. Αυτό που είπαμε πιο πάνω όσον αφορά στην λέξη «ανεξάρτητα», ισχύει με τον ίδιο τρόπο και για τη λέξη «άθροισμα».

Συνειδητά περιορίσαμε την πράξη της δημιουργίας αθροισμάτων σε σύνολα απαριθμήσιμα των somas. Στη θεωρία συνόλων, βέβαια, μια ανάλογη πράξη ορίζεται και για τα μη απαριθμήσιμα σύνολα. Μόνο που στη θεωρία που είμαστε σε φάση να αναπτύξουμε, τα αθροίσματα μη απαριθμήσιμων somas δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν γενικά.

Από την άλλη πλευρά, είναι ουσιαστικό να θέσουμε την έννοια των αθροισμάτων ενός άπειρου πλήθους somas, διότι ακόμα και ο κύκλος στη στοιχειώδη γεωμετρία δεν μπορεί να παραχθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος τριγώνων, αλλά μπορεί με ένα αριθμήσιμο πλήθος



.Σημειώνουμε το άθροισμα *A* των somas A_j με

$$A = A_1 + A_2 + \ldots \quad ή \quad A = \sum_j A_j \qquad (3.2)$$

Τώρα έστω *B* ένα soma ανεξάρτητο από *κάθε* soma A_j που εμφανίζεται στο άθροισμα (3.2). ζητούμε από αυτό να συνεπάγεται *BοA*. Από την άλλη, κανένα από τα somas A_j (εκτός αν είναι το ίδιο soma που θα εισάγουμε μετά) δεν πρέπει να είναι ανεξάρτητο από το *A*.

Το άθροισμα, εξ ορισμού, είναι ανεξάρτητο της διάταξης των somas A_j: με άλλα λόγια είναι αντιμεταθετικό. Ζητούμε επιπλέον να έχει την ιδιότητα της *προσθερεστικότητας* και μάλιστα, προσθερεστικότητα με την ισχυρότατη έννοια της λέξης. Με αυτό εννοούμε το εξής. Έστω, ένα σύστημα αριθμήσιμου πλήθους ανεξάρτητων somas $A_{\kappa j}$ και

$$A = \sum_{k,j} A_{kj} \ , A_{\kappa} = \sum_j A_{kj} \quad (k = 1,2,\ldots). \ (3.3)$$

Με τις προϋποθέσεις μας, τα somas A_k είναι ανά δύο ανεξάρτητα και κατά συνέπεια έχουν ένα άθροισμα. Τώρα ζητούμε αυτό το άθροισμα να είναι το ίδιο με το *A,* έτσι ώστε να γράφουμε

$$A = \sum_k A_k \qquad (3.4)$$

Είναι βολικό να προσθέσουμε στο σύνολο των somas $_0$ ένα επιπλέον ειδικό soma O, το οποίο ονομάζουμε *κενό soma* και χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες

$$O \circ A,\ O+A=A,$$

που ισχύουν για *κάθε* soma *A*. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, συνεπάγεται από τον ορισμό ότι

$$\text{από } A \circ A \text{ συνεπάγεται ότι } A=O. \qquad (3.6).$$