Note sur la fonction de Tagani-Knopp

N. Lygeros

La première courbe non dérivable nulle part a été découverte par Weierstrass en 1875. Son expression analytique est la suivante:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w^{-nH} \cos\left(\omega^n t + \phi_n\right)$$

où $w > 1$ et $0 < H < 1$. La dimension de son graphe est égale à 2-H. Cette fonction est définie à l'aide d'une série trigonométrique. Cependant cette aide n'est pas nécessaire pour construire une fonction non dérivable nulle part. En effet, l'aspect trigonométrique est certes agréable pour établir la propriété de la fonction mais il est possible de s'en passer. C'est ce résultat qui a été explicité par Tagani en 1903 dans son article *A simple example of continuous function without derivative*. (Proc. Phys. Math. Soc. Japan 1 p. 176-177). Son idée a été généralisée par Knopp en 1918 dans son article *Ein einfaches Verfahren sur Bildung stetiger nirgends differenzierbar Funktionen*. (Math. Zeits. 2 p. 1-26). Ainsi afin d'éviter les problèmes de paternité, nous préférons utiliser la terminologie double à savoir: fonction de Tagani-Knopp. Pour la définir, nous introduisons une fonction de période 1, définie sur [0,1] de la manière suivante:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & si \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2t - 1 & si \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Et nous considérons le paramètre habituel H tel que 0<H<1. Alors la fonction de Tagani-Knopp s'écrit sous la forme suivante:

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nH} f(2^n t)$$