L’approche de Goldscheider pour évaluer ζ(2).

N. Lygeros

Considérons l’intégrale suivante :

$$P = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}$$

En remarquant que $\dfrac{1}{1-xy}$ est la somme d’une suite géometrique, il est possible d’écrire

$$P = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n \right) dxdy$$

Aussi $$P = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

Ainsi le calcul de l’intégrale P permet l’évaluation de $\zeta(2)$

Considérons à présent l’intégrale suivante :

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}$$

Il est facile de montrer que $P - Q = \dfrac{1}{2}P$ et donc $P = 2Q$

Quant à $P + Q$ nous avons

$$P + Q = \int_{-1}^{1} dy \int_0^1 \frac{dx}{1+xy}$$

Grâce au changement de variable suivant :

$$u = y + \frac{1}{2}x(y^2 - 1)$$

nous obtenons : $$P + Q = \int_{-1}^{1} du \int_0^1 \frac{dx}{1+2ux+x^2}$$

En posant $u = \cos\varphi$

nous avons $$\frac{\sin\varphi}{1+2ux+x^2} = \frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{x+\cos\varphi}{\sin\varphi} \right)$$

Ainsi $$P + Q = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi d\varphi = \frac{\pi^2}{4}$$

Par conséquent : $P = \dfrac{\pi^2}{6}$ et donc $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$