Remarque sur l'approximation de π par Archimède

N. Lygeros

Le calcul final de l'approximation π par Archimède, s'effectue à l'aide de trois propositions. Commençons donc par l'examen de celles-ci, tout d'abord selon la tradition textuelle.

La surface de tout cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est égal à la longueur du rayon du cercle et l'autre à la circonférence du cercle.

Avec les notations modernes nous avons $\pi\rho^2 = \frac{1}{2}\rho 2\pi\rho$

Pour démontrer cette proposition, Archimède utilise le raisonnement par l'absurde grâce auquel il montre que l'aire recherchée ne peut être ni plus grande ni plus petite que l'aire du triangle rectangle et par conséquent elle est nécessairement égale à celle-ci.

L'aire d'un cercle sur le carré de son diamètre est comme 11 sur 14.

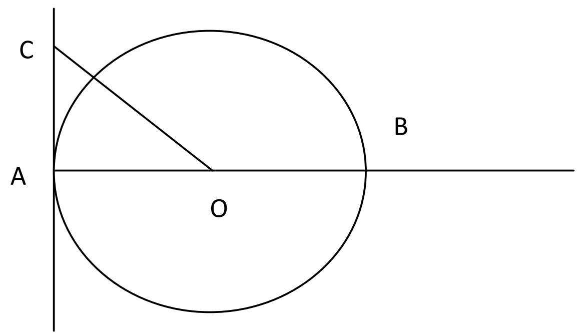
L'examen du contenu de la démonstration de cette proposition par Archimède montre qu'il n'est pas satisfaisant. De plus cette proposition n'a pas de sens avant la proposition 3, car sa valeur dépend directement de son approximation. Cela signifie qu'elle ne peut pas être placée en second, sinon elle crée une incohérence sur le plan mathématique.

Proposition 3: Le rapport de la circonférence de tout cercle sur son diamètre est plus petit que 3/7 mais plus grand que 3 10/7.

Avec les notations modernes nous avons 3 10/71$<\frac{2\pi\rho}{2\rho}<$3 1/7.

Dans le cadre de ses calculs, Archimède ne mentionne pas comment il obtient deux approximations rationnelles de $\sqrt{3}$. De plus, il ne mentionne que les grandes lignes de calcul sans expliciter les étapes intermédiaires que nous signalerons entre crochets pour faciliter non seulement la lecture du texte mais surtout la compréhension de la démonstration de la proposition.

I. Soit AB le diamètre de tout cercle, O son centre, AC la tangente en A et l'angle AOC le tiers d'un angle droit.



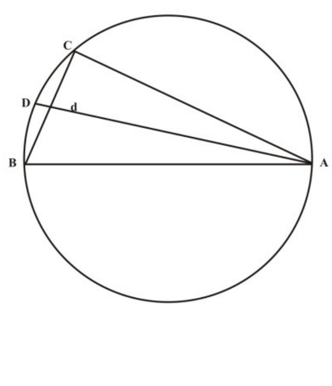
Alors OA : AC$\left[=\sqrt{3}:1\right]>265:153$ (1)

Cette valeur rationnelle de l'approximation de $\sqrt{3}$ n'est pas justifiée par Archimède.

Et OC :CA [=2:1] =306:153 (2)

Archimède utilise donc le nombre 153 comme unité.

En premier lieu, construisons OD la bissectrice de l'angle AOC qui coupe AC en D.



Maintenant $CO:OA=CD:DA$ [D'après Euclide VI 3]

aussi [$CO+OA:OA=CA:DA$, ou]

$$CO+OA:CA=OA:AD$$

Par conséquent: [d'après (1) et (2)]

$$OA:AD>571:153 \qquad (3)$$

[$571=265+306$]

Donc $OD^2:AD^2$[$=(OA^2+AD^2):AD^2$

$>(571^2+153^2):153^2$]

[Première utilisation explicite du théorème de Pythagore]

$$OD^2:AD^2>349450:23409,$$

[L'élévation au carré de 153 est inutile au dénominateur. De plus Archimède n'explicite pas le calcul de la racine de 349450. Il est vrai que $591^2=349281$ mais Archimède veut aussi le 1/8.]

Ainsi $OD:DA>591\ 1/8:153$ (4)

En second lieu, construisons OE la bissectrice de l'angle AOD qui coupe AD en E.

[Alors, de la même manière, nous avons:

$$DO:OA=DE:EA$$

aussi $DO+OA:DA=OA:AE$]

Par conséquent: $OA+AE$ [$>(591\ 1/8+571):153$

d'après (3) et (4)] $> 1162\ 1/8:153$ (5)

[Encore une nouvelle extraction de racine avec approximation qui ne va pas être mentionnée dans le texte d'Archimède.

Il s'ensuit que $OE^2:EA^2>((1162\ 1/8)^2+153^2):153^2$

$>(1350534\ 33/64 + 23409) : 23409$
$> 1373943\ 33/64 :23409$]

Donc $OE :EA>1172\ 1/8 :153$ (6)

En troisième lieu, soit OF la bissectrice de l'angle AOE qui coupe
AE en F. Nous obtenons le résultat [qui correspond au (3)
et au (5) ci-dessus]

OA :AF [>(1162 1/8+1172 1/8) :153]

>2334 1/4 :153 (7)

[Par conséquent : $OF^2 : FA^2 > ((2334 \frac{1}{4})^2 + 153^2) : 153^2$

>5472132 1/16 : 23409]

Aussi OF :FA>2339 1/4 :153 (8)

En quatrième lieu, soit OG la bissectrice de l'angle AOF qui coupe AF en G.

Nous avons alors :

OA :AG [>(2334 1/4 + 2339 1/4) :153 d'après (7) et (8)]

> 4673 1/2 :153

A présent, l'angle AOC, qui est le tiers d'un angle droit, a été bissecté quatre fois, il s'ensuit que <AOG =1/48 (d'un angle droit).

Construisons l'angle AOA de l'autre coté de OA, égal à l'angle AOG, et soit GA coupe OH en H.

Alors <GOH=1/24 (d'un angle droit)

Aussi GH est l'un des cotés d'un polygone régulier à 96 côtés, circonscrit dans le cercle donné

Et comme OA :AG> 4673 1/2 :153

alors que AB=2OA, GH=2AG

il s'ensuit que

AB (périmètre d'un polygone à 96 côtés) [>4673 1/2 : 153*96]

>4673 1/2 :14688

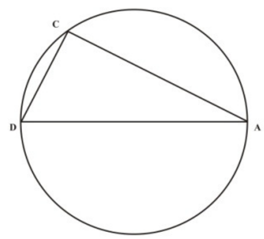
Or $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$

$[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}]$

$< 3\frac{1}{7}$

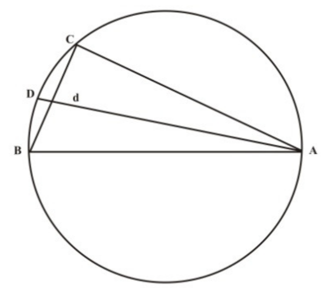
Par conséquent, la circonférence du cercle (étant inférieure à celle du périmètre du polygone régulier) est a fortiori inférieure à $3\frac{1}{7}$ fois au diamètre AB.

II Considérons cette fois AB le diamètre d'un cercle, soit AC qui coupe le cercle en C, et produit un angle CAB égal au tiers d'un triangle rectangle. Relions BC



Alors AC:CB $[=\sqrt{3}:1] < 1351:780$

Voila la seconde approximation de $\sqrt{3}$ qui n'est pas explicitée par Archimède].
En premier lieu, soit AD la bissectrice de l'angle BAC qui coupe BC en d et le cercle en D. Relions BD



Alors <BAD =<dAC=<dBD

et les angles en D, C sont des angles droits.

Il s'ensuit que les triangles $ADB, [ACd], BDd$ sont semblables.

Pour conséquent AD:DB=BD:Dd
[=AC:Cd]
=AB:Bd [d'après Euclide VI. 3]
=AB+AC :Bd+Cd
=AB+AC :BC
ou BA+AC :BC=AD :DB.
[Or AC :CB<1351 :780, d'après ci-dessus
tandis que BA :BC=2 :1
=1560 :780]

Par conséquent, AD :DB<2911 :780 (1)
[Aussi $AB^2 : BD^2 < (2911^2+780^2) : 780^2$
$< 9032321 : 608400$]
Donc AB :BD< 3013 3/4 :780 (2)
En second lieu, soit AE la bissectrice de l'angle BAD, qui
coupe le cercle en E. Relions BE.
Alors nous prouvons de la même manière que précédemment que
AE :EB [=BA+AD :BD
<(3013 3/4 + 2911)/780, d'après (1) et (2)]

$<(5924\ 3/4 : 780$

$<(5924\ 3/4 * 4/13 : 780 * 4/13$

$<1823 : 240$ (3)

[Aussi $AB^2 : BE^2 < (1823^2 + 240^2) : 240^2$

$< 3380929 : 57600$]

Par conséquent, $AB : BE < 1838\ 9/11 : 240$ (4)

En troisième lieu, soit AF la bissectrice de l'angle BAE, qui coupe le cercle en F.
Alors $AF : FB$ [$=BA+AE : BE$

$<3661\ 9/11 : 240$, d'après (3) et (4)

$<3661\ 9/11 * 11/40 : 240 * 11/40$

$<1007 : 66$ (5)

[Il s'ensuit que :

$AB^2 : BF^2 < (1007^2 + 66^2) : 66^2$

$<1018405 : 4356$]

En quatrième lieu, soit l'angle BAF bissecté par AG qui coupe le cercle en G.
Alors $AG : GB$ [$=BA+AF : BF$]

$<2016\ 1/6 : 66$, d'après (5) et (6) .

[Et $AB^2 : BG^2 < ((2016\ 1/6)^2 + 66^2) : 66^2$

$<4069284\ 1/36 : 4356$]

Par conséquent, $AB : BG < 2017\ 1/4 : 66$
et donc : $BG : AB > 66 : 2017\ 1/4$ (7)
[Maintenant l'angle BAG qui est le résultat de la quatrième bissection de l'angle BAG, ou d'un tiers de l'angle droit, est égal à 1/48 d'un angle droit.

Aussi l'angle produit par BG avec le centre est égal à 1/24 (d'un angle droit)
Par conséquent, BG est un côté d'un polygone régulier inscrit à 96 cotés.

Il s'ensuit du (7) que
(périmètre du polygone) : AB [$>96*66 : 2017\ 1/4$]

$>6336 : 2017\ 1/4$

Et $6336/2017\tfrac{1}{4} > 3\ 10/71$

A fortiori donc la circonférence du cercle est plus grande de 3 10/71 fois le diamètre.

Ainsi Archimède obtient $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$

Pour être plus précis dans son approche, il montre le résultat suivant :

$3\ 10/71 < p_{96} < \pi < P_{96} < 3\ 1/7$

Pour nous rendre compte de la précision globale de son calcul, il suffit de passer en écriture décimale :

3 10/71 =3.1408	$p_{96} = 3.1410$
3 1/7=3.1429	$P_{96} = 3.1427$

Dans les deux cas, le terme d'erreur de l'approximation d'Archimède est de l'ordre de deux di millième ! Pour obtenir une troisième décimale correcte, il avait besoin avec cette méthode de polygones réguliers à 192 côtés. En effet, dans ce cas, nous avons

$p_{192} = 3.141452$

$P_{192} = 3.141873$

Enfin, pour nous rendre compte de l'avancée du résultat d'Archimède, il suffit de constater qu'il ne sera amélioré qu'au troisième siècle après J.-C. par le mathématicien chinois Liu Hui.