Démonstration élémentaire de l'irrationalité de π

N. Lygeros

Pour démontrer de manière élémentaire l'irrationalité de π, nous allons utiliser le raisonnement par l'absurde d'Ivan Niven. Considérons que π est le quotient de deux entiers.

Définissons les deux polynômes suivants :

$$f(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!}$$

et

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Comme $n!\, f(x)$ a des coefficients entiers et des termes en x de degré supérieur à n, et ses dérivées ont des valeurs entières pour $x = 0$. C'est aussi le cas pour $x = \pi = a/b$ puisque $f(x) = f(a/b - x)$.

Un calcul élémentaire sur les séries entières montre que :

$$\frac{d}{dx}\left\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right\} = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

donc $$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = \left[F'(x).\sin x - F(x)\cos\right]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0)$$

Comme $f^{(i)}(\pi)$ et $f^{(i)}(0)$ sont des entiers, nous en déduisons que $F(\pi) + F(0)$ est un entier.
Seulement pour $0 < x < \pi$, nous avons :

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Aussi l'intégrale est positive mais arbitrairement petite pour n suffisamment grand. Ce qui est absurde !
Donc π n'est pas rationnel.