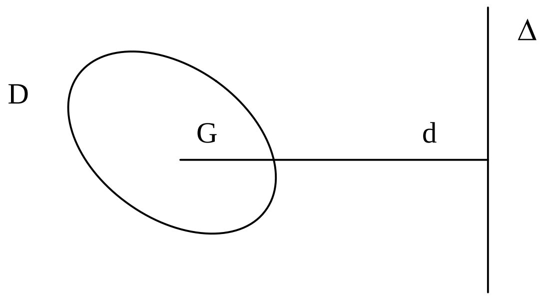
Le problème d'Archimède en tant qu'application du théorème de Pappus-Guldin

N. Lygeros

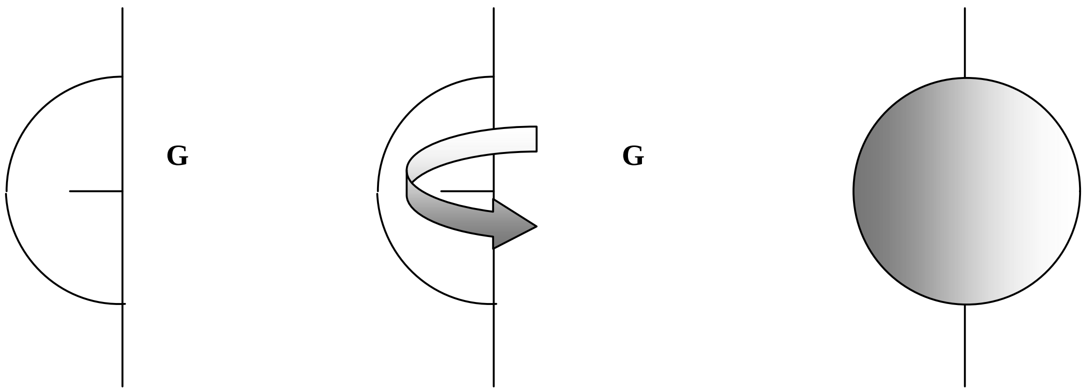
Un des problèmes résolus par Archimède concerne le calcul de la position exacte du barycentre d'un demi-disque. La symétrie permet d'affirmer qu'il se trouve sur l'axe, notons-le *G*. Sa distance au centre du disque sera notée *d*.

Une manière élégante et simple d'aborder ce problème consiste à exploiter le théorème du Guldin (1577-1643) énoncé pour la première fois par Pappus (~360) mais démontré rigoureusement par Cavalieri (1598 -1647). Celui-ci est plus puissant que le problème mais éclaire largement la façon de l'aborder tout en étant compatible avec les connaissances d'Archimède.

Théorème: Si D désigne un domaine plan d'aire A, de centre de gravité G, le volume engendré par la rotation de D autour d'un axe Δ situé dans son plan et ne le coupant pas est donné par $2\pi dA$ où d est la distance entre G et son projeté orthogonal sur Δ.



Notre problème initial représente donc un cas limite puisqu'il suffit de placer l'axe d'un demi-disque sur l'axe de rotation même si l'intersection existe, elle représente un volume nul. Dans ce cas nous obtenons le volume de la boule qui était connu par Archimède, à savoir $\frac{4}{3}\pi\rho^3$



Ainsi nous obtenons l'égalité suivante d'après le théorème de Pappus-Guldin.

$$2\pi\left(\frac{\pi\rho^2}{2}\right)d = \frac{4}{3}\pi\rho^3$$

$$\pi d = \frac{4}{3}\rho$$

$$d = \frac{4\rho}{3\pi}$$

Ce qui représente la position exacte du barycentre du demi-disque et résout le problème d'Archimède.