La théorie des marchés en tant qu'extension de la théorie des jeux V

P.Gazzano, N.Lygeros

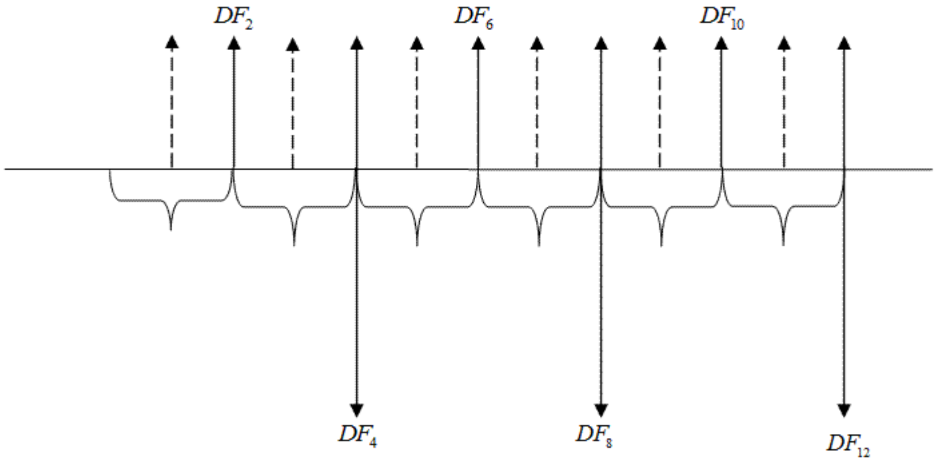
Ainsi que nous l'avons montré dans les notes précédentes, la théorie des marchés peut-être axiomatisée dans le cadre de la théorie des jeux. Cette axiomatisation, bien qu'efficace dans le cadre classique de la théorie des jeux, engendre des simplifications qui sont très réductrices lorsqu'intervient le risque. En effet, cette axiomatisation ne prend pas en compte cette variable qui n'existe pas dans le cas des jeux statiques. Il existe pourtant la théorie des jeux à information incomplète, mais celle-ci ne gère que l'incertitude, qui est une notion moins complexe que le risque.

Comme les agents ont une préférence pour le présent, ils achètent ou vendent immédiatement plutôt que dans un futur toujours incertain. Par conséquent, un investissement à trois mois est préférable à la succession de deux investissements à trois. L'exemple suivant montre qu'une stratégie d'arbitrage, *a priori* simple, respectant les axiomes de la théorie de la rationalité peut engendrer un système complexe très chaotique.
Nous considérons un swap d'échéance N années entre deux parties, qui échange un taux fixe contre un taux variable. Le swap permet ainsi de se protéger des variations du taux variables. Ce type de contrat n'élimine pas le risque mais le transfert à la contrepartie qui achète le swap. Cet exemple démontre parfaitement la simplification qu'engendre une telle formalisation.

En appelant :

- $DF_1, DF_2, \ldots DF_n$ les coefficients d'actualisation
- δ l'écart temporel séparant deux dates de versements de flux fixes
- $R_{1,\delta/2}, R_{2,\delta/2}, \ldots, R_{n,\delta/2}$ les taux espérés pour un investissement démarrant en i pour une durée de $\delta/2$
- $R_{1,\delta/4}, R_{2,\delta/4}, \ldots, R_{n,\delta/4}$ les taux espérés pour un investissement démarrant en i pour une durée de $\delta/4$

nous avons alors la structure de flux suivante :



La valeur en 0 de la jambe fixe est la somme de l'actualisation des flux fixes futurs :

$$JF = DF_4 R\delta + DF_8 R\delta + DF_{12} R\delta$$

La valeur en 0 de la jambe variable est la somme de l'actualisation des flux variables futurs :

$$JV = \frac{\delta}{2} DF_2 R_{1,\delta/2} + \frac{\delta}{2} DF_4 R_{2,\delta/2} + \frac{\delta}{2} DF_6 R_{3,\delta/2} + \frac{\delta}{2} DF_8 R_{4,\delta/2} + \frac{\delta}{2} DF_{10} R_{5,\delta/2} + \frac{\delta}{2} DF_{12} R_{6,\delta/2}$$

Or, en utilisant la relation qui est issue des axiomes de la théorie de la rationalité, entre les taux anticipés démarrant à t pour une durée T avec les taux réels en 0, nous avons :

$$(1 + R_{t,\delta/2})^{\delta/2} = \frac{(1 + R_{t+\delta/2})^{\delta/2+t}}{(1 + R_t)^t}$$

qui se simplifie en

$$R_{t,\delta/2} = \frac{DF_t - DF_{\delta/2+t}}{\delta/2 DF_{\delta/2+t}}$$

En remplaçant cette relation dans JV, on a :

$$JV = \frac{\delta}{2} DF_2 \frac{DF_{\delta/2} - DF_{1+\delta/2}}{\delta DF_{1+\delta/2}} + \frac{\delta}{2} DF_4 \frac{DF_{1+\delta/2} - DF_{2+\delta/2}}{\delta DF_{2+\delta/2}} + \frac{\delta}{2} DF_6 \frac{DF_{2+\delta/2} - DF_{4+\delta/2}}{\delta DF_{4+\delta/2}}$$

$$+ \frac{\delta}{2} DF_8 \frac{DF_{4+\delta/2} - DF_{6+\delta/2}}{\delta DF_{6+\delta/2}} + \frac{\delta}{2} DF_{10} \frac{DF_{6+\delta/2} - DF_{8+\delta/2}}{\delta DF_{8+\delta/2}} + \frac{\delta}{2} DF_{12} \frac{DF_{8+\delta/2} - DF_{10+\delta/2}}{\delta DF_{10+\delta/2}}$$

Etant donné que : $DF_{i+2} = DF_{i+\delta/2}$
Nous avons :

$$\begin{aligned} JV &= DF_{\delta/2} - DF_{1+\delta/2} + DF_{1+\delta/2} - DF_{2+\delta/2} + DF_{1+\delta/2} - DF_{4+\delta/2} \\ &+ DF_{4+\delta/2} - DF_{6+\delta/2} + DF_{6+\delta/2} - DF_{8+\delta/2} + DF_{8+\delta/2} - DF_{10+\delta/2} \end{aligned}$$

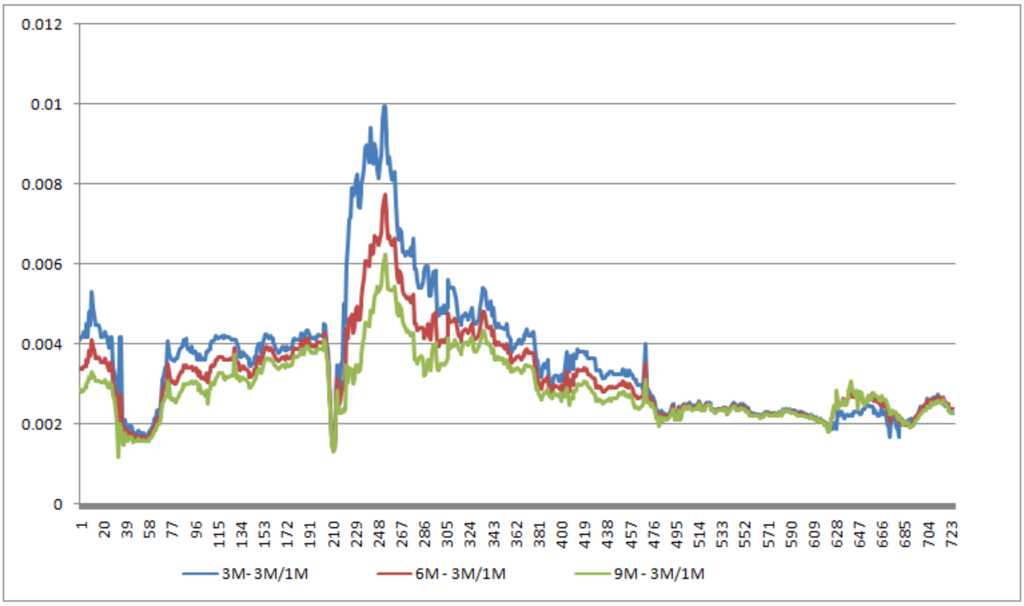
Par conséquent, nous obtenons :

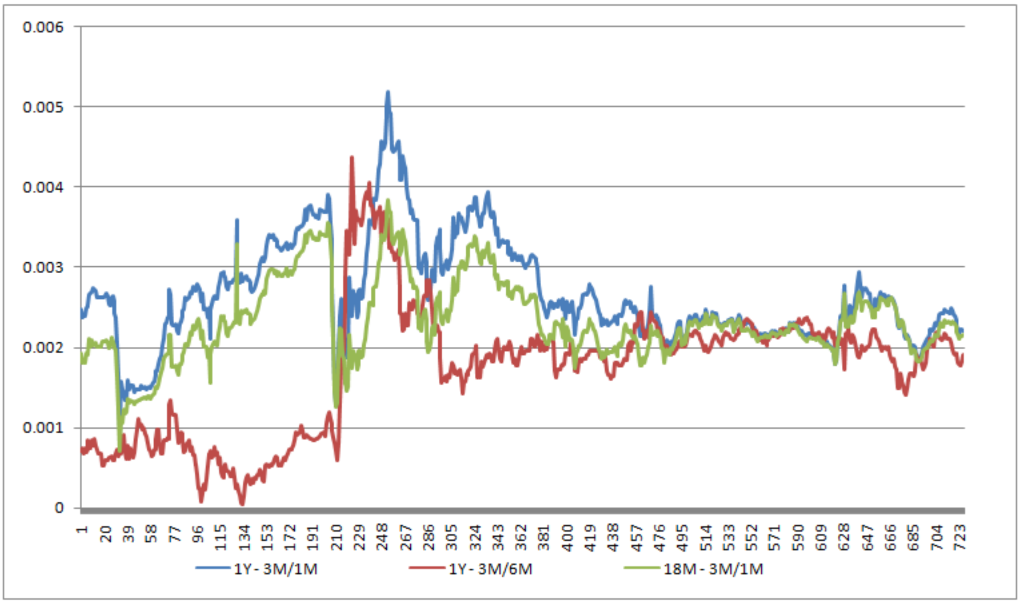
$$JV = DF_0 - DF_{12}$$

L'égalité $JV = JF$ donne comme point d'équilibre :

$$R = \frac{DF_0 - DF_{12}}{DF_4\delta + DF_8\delta + DF_{12}\delta}$$

L'expression précédente montre que le point fixe est indépendant de la fréquence de versement des flux variables. Par conséquent, un swap ayant un versement du flux variable à six mois sera totalement équivalent à un swap ayant un versement du flux variable tous les trois mois. Ceci signifie donc que les points d'équilibres sont équivalents. La théorie implique donc que les deux jeux sont totalement identiques, et que les deux points d'équilibres sont égaux.
En réalité, il n'en est rien. Il existe bien un écart entre ces deux points d'équilibres. La représentation empirique de l'écart des taux de swap avec des données historiques, montre non seulement qu'il n'est pas nul, mais qu'il présente un comportement chaotique. Ce comportement chaotique est plus intense à court terme, car le risque est d'autant plus important que la maturité est courte et la décision découlant de l'échéance approche.
Le graphique suivant montre les spread de taux pour différentes maturités et différentes courbes de taux :





A titre de comparaison, le graphique montre la dynamique du spread de taux de swap 7Y-6M/3M (en vert) par rapport à aux taux 6M et au taux 3M (en bleu et en rouge).