Ο ορισμός του $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$, μέσω του Serre

Ν. Λυγερός

Έστω H το άνω ημιεπίπεδο των μιγαδικών αριθμών. Έστω $SL_2(\mathbb{R})$ η ομάδα των πινάκων $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, με πραγματικούς συντελεστές, τέτοιοι ώστε ad-bc=1. Ορίζουμε την δράση του $SL_2(\mathbb{R})$ πάνω στο $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ με τον εξής τρόπο:

εάν $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι στοιχείο του $SL_2(\mathbb{R})$ και $z \in \bar{\mathbb{C}}$ τότε γράφουμε:

$$gz = \frac{az+b}{cz+d}$$

Καθώς $\operatorname{Im}(gz) = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$, το H παραμένει σταθερό μέσω της δράσης του $SL_2(\mathbb{R})$.

Ενώ το στοιχείο $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ του $SL_2(\mathbb{R})$ δρα τετριμένα στο H.

Έτσι δικαιούμαστε να θεωρήσουμε ότι είναι η ομάδα $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2/\{\pm 1\}$ που δρα, το οποίο είναι μάλιστα η ομάδα όλων των αναλυτικών αυτομορφισμών του H.

Έστω $SL_2(\mathbb{Z})$ η υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$, η οποία αποτελείται από πίνακες με ακέραιους συντελεστές. Είναι η διακριτή υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$

Ορισμός: Η ομάδα $G=SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ είναι η εικόνα της ομάδας $SL_2(\mathbb{Z})$ στο $PSL_2(\mathbb{R})$.

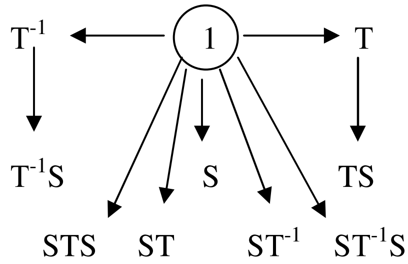
Έστω τα στοιχεία του G, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, έχουμε:

$$Sz = -\frac{1}{2},\ S^2 = 1,\ Tz = z+1,\ (ST)^3 = 1.$$

Έστω Δ το υποσύνολο του $H : z \in \mathbb{C}\ / |z| \geq 1$ και $|\operatorname{Re}(z)| \leq \dfrac{1}{2}$.

Το σύνολο Δ είναι το θεμελιακό πεδίο για τη δράση του G πάνω στο H.

Στην εικόνα βλέπουμε τους μετασχηματισμούς του Δ μέσω των στοιχείων



$\{1, T, TS, ST^{-1}S, ST^{-1}, S, ST, STS, T^{-1}S, T^{-1}\}$

Θεώρημα 1: 1) $\forall z \in H$, $\exists g \in G \,/\, gz \in \Delta$

2) Εάν $z \neq z'$ με z και z' στο Δ, ισοδύναμα modulo G. Τότε έχουμε,

Είτε $\mathrm{Re}(z) = \pm\dfrac{1}{2}$ και $z = z' \pm 1$,

Είτε $|z| = 1$ και $z' = -\dfrac{1}{z}$

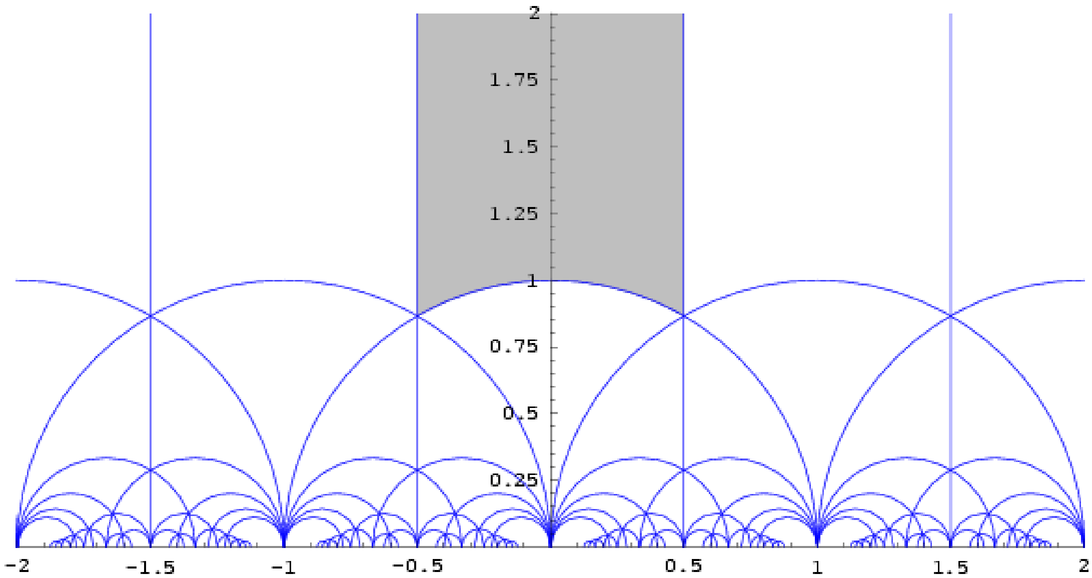
3) Έστω $z \in \Delta$ και $I(z) = \{g \,/\, g \in G, gz = z\}$

ο σταθεροποιητής του z στο G: Έχουμε $I(z) = \{1\}$

εκτός από τις τρεις περιπτώσεις:

- $z = i$, $I(z)$ είναι η ομάδα τάξης 2 που παράγει η S,
- $z = \rho = e^{2i\pi/3}, I(z)$ είναι η ομάδα τάξης 3 που παράγει η ST
- $z = -\overline{\rho} = e^{i\pi/3}, I(z)$ είναι η ομάδα τάξης 3 που παράγει η TS.

Θεώρημα 2: Η ομάδα G παράγεται από S και T.



2
1.75
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2