Εισαγωγή στις παραβολικές μορφές

Ν. Λυγερός

Έστω η συναρτησιακή εξίσωση: $f(z) = (cz+d)^{-2k} f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)$

για κάθε $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, όπου $k \in \mathbb{N}$.

Έστω g η εικόνα στη G του πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Υπολογισμός του διαφορικού: $\dfrac{d(gz)}{dz}$

Έχουμε $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ και $gz = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$$\frac{d(gz)}{dz} = \frac{d(az+b)(cz+d) - d(cz+d)(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2}$$

$$\frac{d(gz)}{dz} = \frac{\cancel{acz} + ad - \cancel{caz} - cb}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

Κατά συνέπεια, η συναρτησιακή εξίσωση γράφεται:

$$f(z) = \left(\frac{d(gz)}{dz}\right)^{-k} f(gz)$$

$$\frac{f(gz)}{f(z)} = \left(\frac{d(gz)}{dz}\right)^{k}$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μία διαφορική μορφή που παραμένει αναλλοίωτη μέσω G.

Καθώς η ομάδα G παράγεται από τα στοιχεία $S = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ και $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

αρκεί αυτή η μορφή να παραμείνει αναλλοίωτη μέσω του S και T.

Χαρακτηρισμός : • $f(z+1) = f(z)$

f μερόμορφη • $f\left(-1/z\right) = z^{2k} f(z)$

$\Big\}$ Ασθενή (Modulaire)

Ορισμός : (Modulaire) := ασθενή (Modulaire) και μερόμορφη στο άπειρο.

Ορισμός : Παραβολική μορφή: (Modulaire) ολόμορφη και μηδενική στο άπειρο.