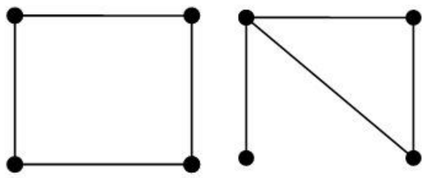
Sur les graphes connexes, cospectraux, de même taille,

mêmes degrés, non réguliers, non isomorphes

N. Lygeros, R. Philippe, I. Pitault, D. Schweich, M.-L. Zanota

Considérons un graphe G ayant n sommets et a arêtes. Notons (G, n, r) l'ensemble de ces informations. Nous pouvons alors nous interroger sur la caractérisation de ce graphe à l'aide du nombre de sommets et du nombre d'arêtes. En d'autres termes, s'il n'est pas caractérisé de manière unique, il est possible de trouver un graphe G' avec le même nombre de sommets et arêtes qui ne soit pas isomorphes à G. L'exemple suivant montre que c'est bien le cas. En effet, examinons les deux graphes suivants :



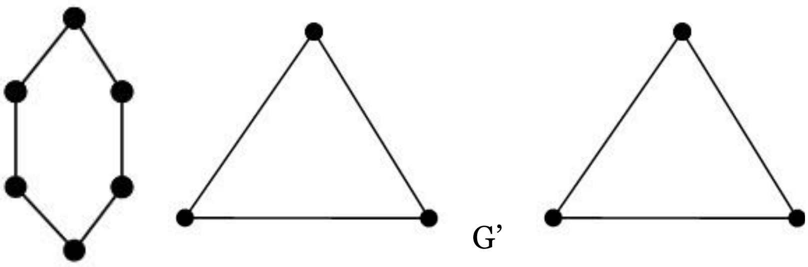
Les deux graphes ont 4 sommets et 4 arêtes mais ils ne sont pas isomorphes.

Ajoutons un autre paramètre, à savoir le degré des sommets, i.e. le nombre d'arêtes qui touchent un sommet considéré.

Cette fois nous considérons les objets de ce type (G, n, r, d) où d représente la séquence de l'ensemble des degrés.

Dans le cas d'un graphe régulier, cette séquence est triviale puisque toutes les valeurs sont identiques.

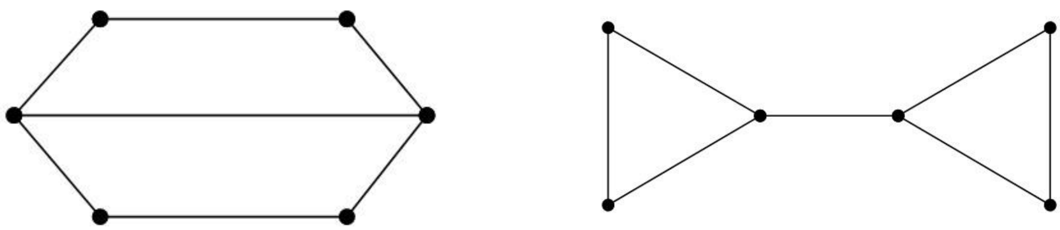
Cette fois encore cette caractérisation n'est pas unique. En effet, examinons les deux graphes suivants : C6 et C3 U C3



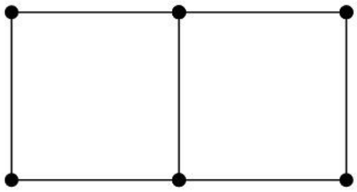
G G'

Les deux graphes sont 2-réguliers, ont 6 arêtes mais ils ne sont pas isomorphes.

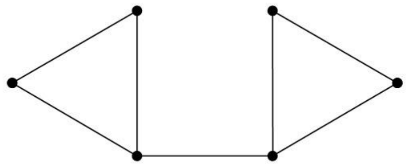
Et en leur ajoutant une arête, nous pouvons montrer aisément que l'ajout de la propriété de connexité des graphes G et G' mais aussi le fait qu'ils ne soient pas réguliers ne permet toujours pas de caractériser de manière unique un graphe. En effet,



(G,6,6,(3,3,2,2,2,2)) ≭ (G’,6,6,(3,3,2,2,2,2))



G



G’

Autre représentation des graphes G et G’.

Considérons, à présent, les polynômes caractéristiques des matrices d’adjacence des deux graphes considérés. Nous obtenons :

et $\chi_{G'} = x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 1$

$\chi_G = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 11x^2 + 12x + 3$

Les racines de $\chi_{G'}$ sont : $-\sqrt{3}, -1, -1, 1-\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1+\sqrt{2}$

Les racines de χ_G sont : $-1-\sqrt{2}, -1, 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1, 1, 1+\sqrt{2}$

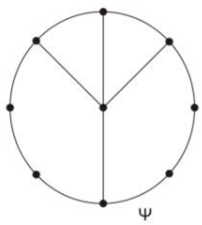
Nous remarquons que ces racines qui correspondent aux valeurs propres des matrices d’adjacence ne sont pas toutes identiques. Il en est de même si nous considérons les spectres associés, non plus aux matrices d’adjacence des graphes mais aux matrices laplaciennes de ceux-ci. En effet, nous obtenons :

$\chi_{LG'} = x^6 - 14x^5 + 74x^4 - 184x^3 + 213x^2 - 90x$ dont les racines sont : 0, 1, 2, 3, 3, 5.

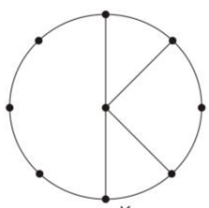
et $\chi_{LG} = x^6 - 14x^5 + 74x^4 - 180x^3 + 189x^2 - 54x$

dont les racines sont $0, \frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, 3, 3, 3.$

Ces considérations nous amènent à étudier les graphes cospectraux c’est-à-dire les graphes non isomorphes qui ont le même spectre, tout en gardant les mêmes conditions que précédemment à savoir identifié de nombre de sommets, nombre d’arêtes, séquence des degrés et connexité. Nous avons ainsi G et G’ qui vérifient cet ensemble avec les graphes



Ψ



K
