Ικανή συνθήκη περί δίαστασης 3 για τα σύνολα μερικής διάταξης

Ν. Λυγερός , Ν. Χατζηγεωργίου

Θέωρημα : Έστω P, σύνολο μερικής διάταξης. Αν $\nexists Conj\ (P)$ και $width(P) \leq 3$ τότε $\dim(P) = 3$

Απόδειξη :

(1) Λόγω του θεωρήματος Dushnik & Miller έχουμε :

$\nexists\ Conj(P) \Rightarrow \dim(P) > 2$

(2) Λόγω του θεωρήματος Hiraguchi έχουμε :

$\dim(P) \leq width(P) = 3$

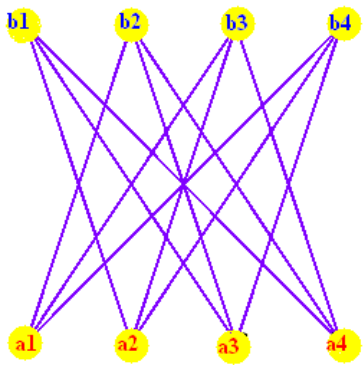
(1) και (2) $\Rightarrow \dim(P) = 3$ □

Λήμμα : Το θεώρημα είναι βέλτιστο.

Απόδειξη :

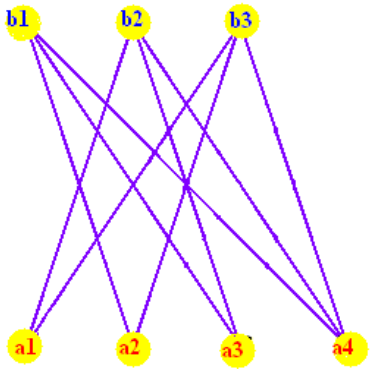
Έστω ένα σύνολο μερικής διάταξης με 8 στοιχεία και διάστασης 4. Λόγω του θεωρήματος του Hiraguchi, έχουμε $\dim(P) \leq \frac{|P|}{2}$, άρα αυτό το σύνολο μερικής διάταξης είναι κρίσιμο με την ένοια τις διάστασης.

Έστω S_4 , έχουμε προφανώς $\text{width}(S_4) = 4$.



Κατά τον Trotter, αυτό το σύνολο μερικής διάταξης έχει διάσταση 4 και ξέρουμε ότι είναι κρίσιμο διότι έχει 8 στοιχεία.

Ας αποδείξουμε μέσω των αλυσίδων ότι έχει διάσταση 3.



Αλυσίδες :

$$\mathbf{a_2 < a_3 < a_4 < b_1 < a_1 < b_2 < b_3}$$
$$\mathbf{a_1 < a_3 < a_4 < b_2 < a_2 < b_1 < b_3}$$
$$\mathbf{a_1 < a_2 < a_4 < b_3 < a_3 < b_1 < b_2}$$

Αυτό το σύνολο μερικής διάταξης έχει διάσταση 3.

Άρα : $\exists P \mid \dim(P) = 3$ και $width(P) = 4$

Κατά συνέπεια το θεώρημα είναι βέλτιστο. □

Αναφορές

B. Dushnik and E. Miller, Partially ordered sets, Amer. J. Math. 63 (1941) 600-610. MR 3, 73.

T. Hiraguchi, On the dimension of orders, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 4 (1955), 1-20. MR 17, 1045; 19, 1431.

W. T. Trotter, Dimension of the crown S_n^k, Discrete Math. 8 (1974), 85-103.