Κατασκευή συνόλων μερικής διάταξης τάξης n με κυκλική αναπαράσταση.

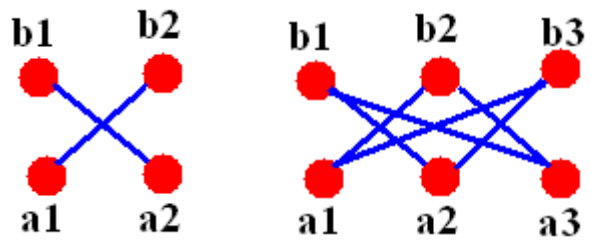
Ν. Λυγερός , Ν. Χατζηγεωργίου

Τα συνόλα μερικής διάταξης κανονικού τμήματος I_n αποτελούνται από όλα τα τμήματα με ακέραια τελικά σημεία από το σύνολο {1, 2, …, n}.

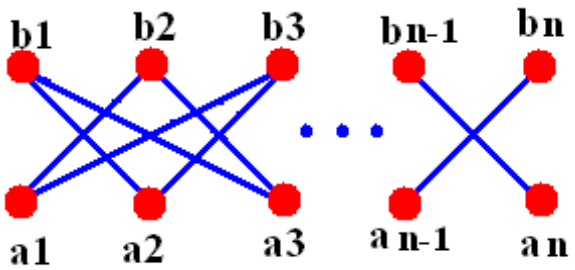
Θεώρημα (Bogart, Trotter) : Για κάθε t υπάρχει ένας ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε εαν $n > n_0$, τότε $\dim(I_n) > t$.

Κατά συνέπεια για κάθε n, υπάρχει ένα συνόλο μερικής διάταξης το οποίο έχει διάσταση n.

Τώρα θέλουμε να εξετάσουμε εάν για κάθε n, υπάρχει ένα συνόλο μερικής διάταξης διάστασης n, το οποίο να έχει κυκλική αναπαράσταση. Εξετάζουμε την περίπτωση της οικογένειας των Standard συνόλο μερικής διάταξης S_n. Το διάγραμμα Hasse του Standard n υλοποιείται ως εξής. Σχεδιάζουμε 2n κορυφές. Τα n άτομα τα ονομάζουμε a_1 έως a_n. Τα n σύνατομα τα ονομάζουμε b_1 έως b_n. Για κάθε a_i όπου $i \in [1, n]$ συνδεέται με όλα τα b_k όπου το $k \in [1, n] \setminus \{i\}$.



Standard S_2 Standard S_3



Standard n (S_n)

Γεγονός : Το Standard S_n έχει διάσταση n, $dim(S_n) = n$.

Γεγονός : Το Standard S_n έχει $width(S_n) = n$.

Θεώρημα : Κάθε S_n έχει κυκλική αναπαράσταση.

Απόδειξη : Έστω ένα κανονικό πολύγωνο (τάξης *n*) εγγεγραμένο, σ' ένα κύκλο ακτίνας ρ. Από κάθε κορυφή, κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας 2ρ. Κάθε νέος κύκλος εφάπτεται στον αρχικό. Μετά αν θεωρήσουμε τον άξονα που δημιουργούν τα κέντρα του αρχικού κύκλου και ενός κύκλου με διπλή ακτίνα τότε τα σημεία που βρίσκονται εκτός του αρχικού κύκλου και εκτός του δεδομένου κύκλου, κοντά στο σημείο που εφάπτονται οι δύο κύκλοι, ανήκουν σε όλους τους άλλους κύκλους. □

Κατά συνέπεια, για κάθε n, υπάρχει ένα συνόλο μερικής διάταξης διάστασης n, το οποίο έχει κυκλική αναπαράσταση.

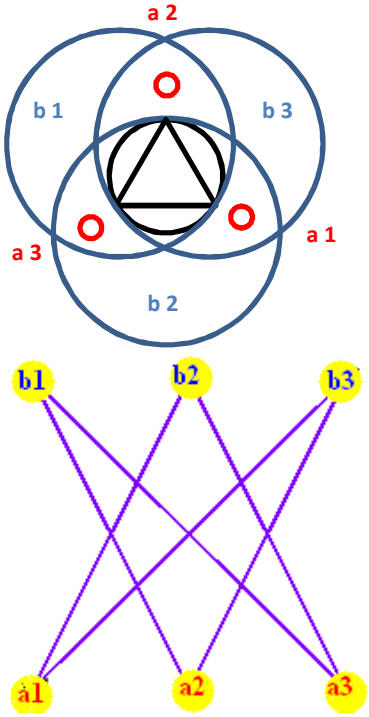
Αναφορές

K.P. Bogart, I. Rabinovich, W.T.jun. Trotter, A bound on the dimension of interval orders. J. Comb. Theory, Ser. A 21, 319-328 (1976).

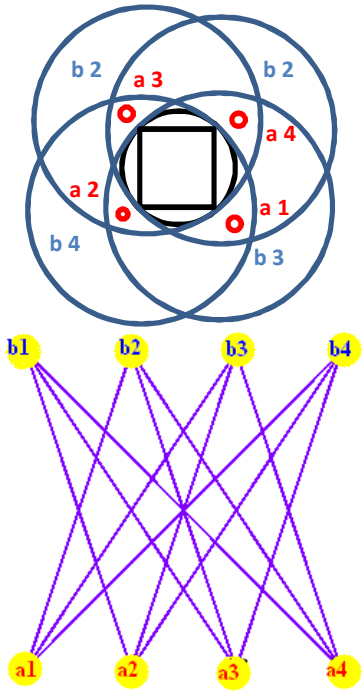
G. Brightwell and P. Winkler, Sphere orders, Order, 6(3)(1989), 235–240.

R. Fraissé , N. Lygeros, Petits posets: dénombrement, représentabilité par cercles et "compenseurs", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 313(7)(1991), 417–420.

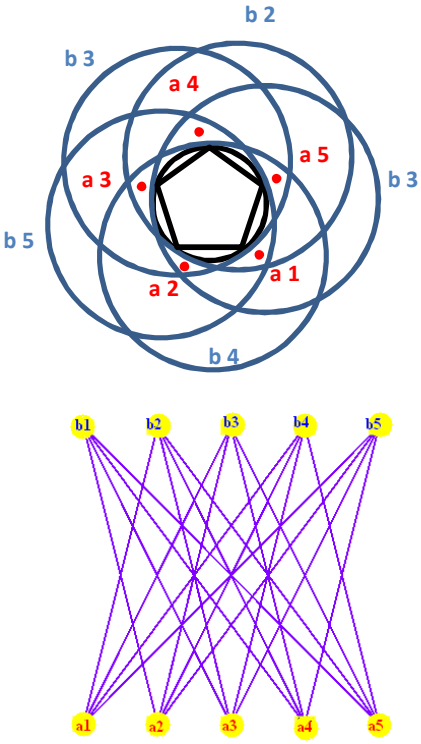
W.T.jun. Trotter, K.P. Bogart, On the complexity of posets. Discrete Math. 16, 71-82 (1976).



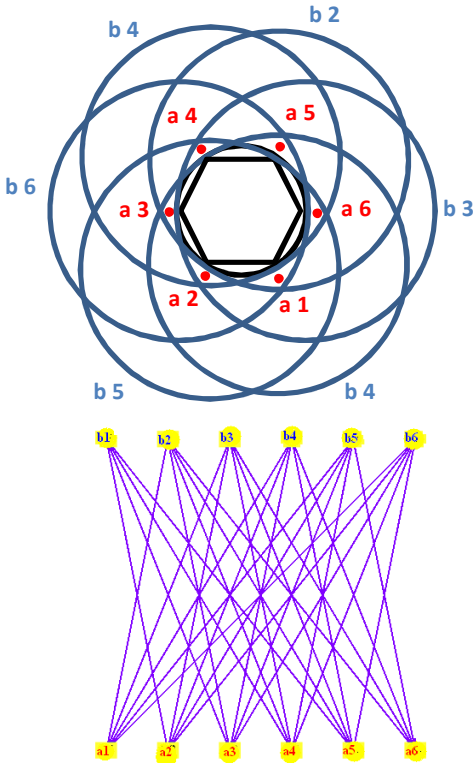
S_3



S_4



S_5



S_6

Κυκλική αναπαράσταση των S_3, S_4, S_5, S_6