Κυκλική αναπαράσταση και σύνολα μερικής διάταξης ύψους 2.

Ν.Λυγερό, Ν. Χατζηγεωργίου

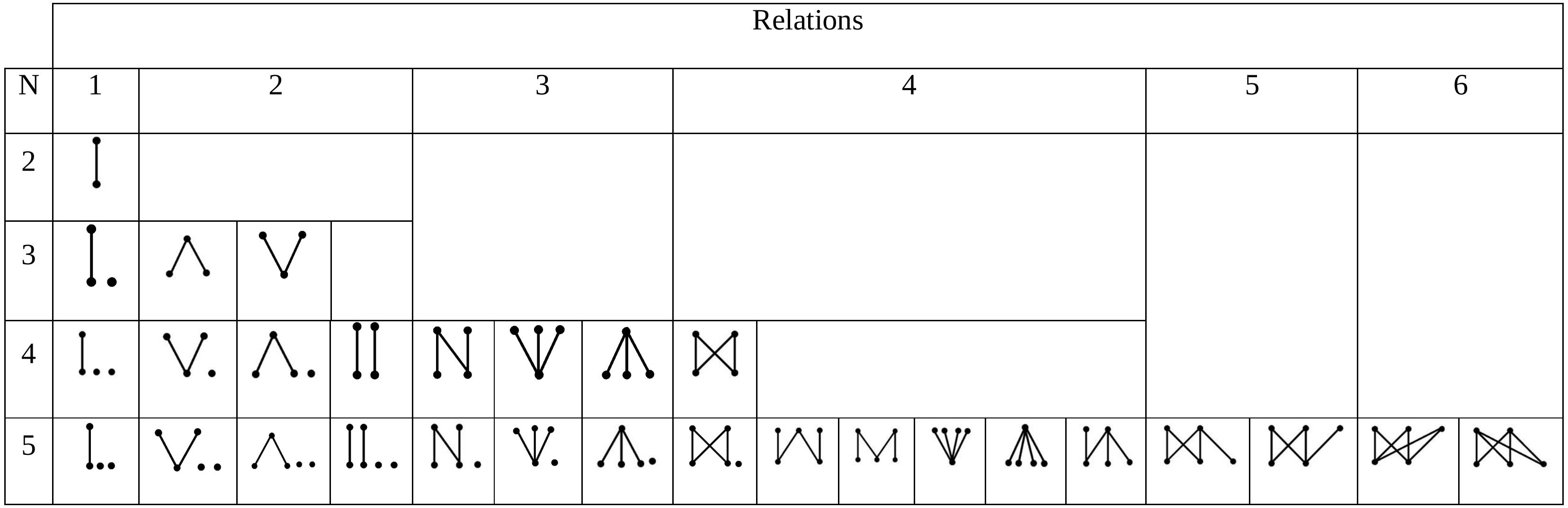
Η μελέτη των συνόλων μερικής διάταξης ύψους 2, είναι σημαντική στη θεωρία διάταξης λόγω της εξής ιδέας.

Γενικά ένας γράφος αποτελείται από κορυφές και ακμές. Είναι δυνατόν να κωδικοποιήσουμε ένα τέτοιο γράφο μ' ένα σύνολο μερικής διάταξης ύψους 2, με τον επόμενο τρόπο, ο οποίος κατασκευάζει και έναν ισομορφισμό. Όλες οι κορυφές ερμηνεύονται ως άτομα του συνόλου μερικής διάταξης και οι ακμές ως συνάτομα. Οι σχέσεις καθορίζονται μεταξύ ατόμων και συνατόμων μέσω της κάθε ακμής που ενώνει δύο κορυφές. Γι' αυτό το λόγο μελετάμε τα σύνολα μερικής διάταξης ύψους 2.

Το 1991, οι Hazim-Sharif και Lygeros απαρίθμησαν τα σύνολα μερικής διάταξης έως την τάξη 11 με το πάχος κι ανάλογα με το ύψος τους. Τα σύνολα μερικής διάταξης ύψους 2, όσον αφορά στο πλήθος τους είναι τα εξής:

N = 2	P = 1	N = 7	P = 163
N = 3	P = 3	N = 8	P = 556
N = 4	P = 8	N = 9	P = 2222
N = 5	P = 20	N = 10	P = 10765
N = 6	P = 55	N = 11	P = 64955

Και τα διαγράμματα Hasse έως την τάξη 5 είναι τα εξής:

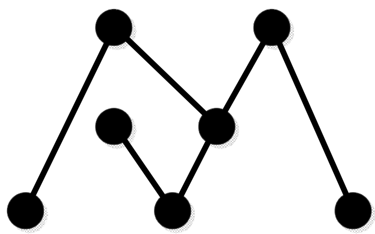


Μέσω του θεωρήματος του Hiraguchi του 1955 γνωρίζουμε ότι η διάταξη του είναι μικρότερη του 2. Και μέσω του θεωρήματος Dushnik-Miller του 1941, ξέρουμε ότι όλα έχουν μία κυκλική αναπαράσταση.
Το ίδιο ισχύει για τις εξής οικογένειες συνόλων μερικής διάταξης C_n,S_n, $K_{n,n}$. Καθώς αυτά τα σύνολα ανήκουν στο σύνολο της μελέτης μας λόγω των S_n το κριτήριο της θεωρίας διάταξης δεν επαρκεί. Στο πλαίσιο των συνόλων μερικής διάταξης ύψους 2, ανήκουν και τα δέντρα. Αυτά ερμηνεύονται ως τέτοια σύνολα, δίχως μεταβατικές σχέσεις, όπως είναι κι όλα τα σύνολα ύψους 2. Κατά συνέπεια τίθεται το ερώτημα αν τα δέντρα έχουν κυκλική αναπαράσταση. Χάρις στο θεώρημα του Trotter το 1974, έχουμε το εξής αποτέλεσμα. Όλα τα δέντρα μερικής διάταξης έχουν μέγιστη διάσταση 3. Και συνεπώς έχουμε δύο κατηγορίες δέντρων Τ.

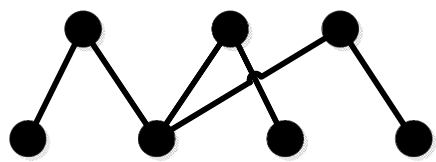
$\dim(T) \leq 2$, τα οποία έχουν κυκλική αναπαράσταση λόγω των Dushnik-Miller.

Οι Sidney – Sidney – Urrutia το 1988 απέδειξαν ότι ο αριθμός διασταύρωσης ενός συνόλου μερικής διάταξης, διάστασης n είναι μικρότερος ή ισούται με n-1. Την ίδια χρονιά έκαναν την εξής εικασία: όλα τα σύνολα μερικής διάταξης με αριθμό διασταύρωσης 2, έχουν κυκλική αναπαράσταση από την οποία συνεπάγεται ότι όλα τα σύνολα μερικής διάταξης με διάσταση 3, έχουν κυκλική αναπαράσταση. Όμως το 1999, οι Fischburn, Flesner και Trotter ανακάλυψαν την ύπαρξη ενός πεπερασμένου συνόλου μερικής διάταξης με διάσταση 3, το οποίο να μην έχει κυκλική αναπαράσταση. Κατά συνέπεια, οι δύο εικασίες είναι λανθασμένες.

Ένας τρόπος για να λύσουμε το πρόβλημά μας περί δέντρων είναι να τα βυθίσουμε στο πλαίσιο του Trotter ο οποίος γενικεύει τα κλασικά δέντρα με την έννοια του δέντρου στο διάγραμμα Hasse. Απέδειξε ότι τα δέντρα έχουν διάσταση 2 αν και μόνο αν δεν εμπεριέχουν ως υποσύνολα μερικής διάταξης τα εξής σύνολα J_1 και J_2



J_1



J_2

Ή τα δυικά τους $\hat{J}_1$ και $\hat{J}_2$.

Κατά συνέπεια τα δέντρα ύψους 2 δεν εμπεριέχουν ποτέ J_1 ή $\hat{J}_1$. Έτσι το πρόβλημα περιορίζεται στα δέντρα που εμπεριέχουν J_2 ή $\hat{J}_2$.