

Περί ύψους μικρών συνόλων μερικής διάταξης

N. Λυγερός, N. Χατζηγεωργίου

Abstract: All the posets on at most 12 elements share the unimodality property when they are ordered according to the height parameter.

Résumé : Tous les posets d'au plus 12 éléments vérifient la propriété d'unimodalité lorsqu'ils sont ordonnés selon le paramètre de la hauteur.

Έστω P_n^r, P_n^h, P_n^l διαδοχικά, το πλήθος των συνόλων μερικής διάταξης τάξης n με r σχέσεις με h ύψος και l πλάτος. Η έννοια του ύψους ενός συνόλου μερικής διάταξης p ορίζεται ως το μέγιστο του πλήθους των σημείων μιας αλυσίδας πάνω σε όλες τις αλυσίδες του p . Η έννοια του πλάτους ενός συνόλου μερικής διάταξης p ορίζεται ως το μέγιστο του πλήθους των σημείων μιας αντι-αλυσίδας πάνω σε όλες τις αντι-αλυσίδες του p .

Το 1991 με τον Roland Fraïssé στο πλαίσιο της μελέτης της κυκλικής αναπαράστασης των συνόλων μερικής διάταξης διαπιστώνουμε μια σειρά από εικασίες οι οποίες παραμένουν ορθές και με τα πιο πρόσφατα αποτελέσματα στον τομέα της απαρίθμησης αυτών των συνόλων. Σε αυτό το άρθρο αναφερθήκαμε και σε μια εικασία του Fraïssé, ο οποίος την διατύπωσε στην αλληλογραφία μας.

Εικασία F: Για n δεδομένο, η ακολουθία P_n^r είναι μονόκορφη. Αυτή η εικασία επιβεβαιώθηκε έως το $n=16$.

O Walied Hazim Sharif, μαθητής και αυτός του Roland Fraïssé μελετώντας την έννοια της επέκτασης στα σύνολα μερικής διάταξης είχε την ιδέα να μετατρέψει την εικασία F στο πεδίο του ύψους των συνόλων μερικής διάταξης.

Εικασία H: Για n δεδομένο, η ακολουθία P_n^h είναι μονόκορφη. Απέδειξε ο ίδιος ότι η εικασία ισχύει για n μικρότερο του 7 και σε συνεργασία μαζί μας το 1991 έκανε την επέκταση αυτού του αποτελέσματος έως το $n=11$. Κατά αναλογία μεταφέραμε την εικασία στο πεδίο του πλάτους.

Εικασία L: Για n δεδομένο, η ακολουθία P_n^l είναι μονόκορφη. Στο πλαίσιο της ίδιας έρευνας αποδείξαμε ότι η εικασία ισχύει και $n=11$.

Όπως το αναφέραμε στην τότε έρευνα μας αυτές οι εικασίες δεν μπορούν να θεωρηθούν ως φυσιολογικές ή αυτονόητες. Παραδείγματος χάριν ο Maurice Pouzet και ο Ivo Rosenberg είχαν εικάσει ότι το προφίλ κάποιων σχέσεων είναι μονόκορφο και αυτή η περίπτωση φαινόταν λογική, όμως ο Dennis Stanton με τη χρήση ενός υπολογιστή κατάφερε να βρει ένα αντιπαράδειγμα στον τομέα των επιμερισμών με 24 στοιχεία. Για αυτό λόγο είμαστε κι εμείς πολύ προσεχτικοί στον τομέα των συνόλων μερικής διάταξης. Έτσι στο πλαίσιο της ίδιας έρευνας μέσω του παραλληλισμού των υπολογισμών της κυκλικής αναπαράστασης των συνόλων μερικής διάταξης 11 αποφασίσαμε να επικεντρωθούμε στο πρόβλημα του ύψους αυτών των συνόλων έως την τάξη 12 για να εξετάσουμε την ισχύ της εικασίας H. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα.

n\H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	1	1										
3	1	3	1									
4	1	6	8	1								
5	1	10	31	20	1							
6	1	15	84	162	55	1						
7	1	21	185	734	940	163	1					
8	1	28	356	2380	7305	6372	556	1				
9	1	36	623	6259	35070	86683	52336	2222	1			
10	1	45	1016	14258	125597	619489	1261371	534741	10765	1		
11	1	55	1569	29241	370057	3012577	13452868	22902794	6915309	64955	1	
12	1	66	2320	55334	947791	11417476	88552403	364127372	521473207	112613800	499647	1

Για να επιτευχθεί ο ολικός παραλληλισμός πρέπει να επιμεριστεί το αρχείο εισόδου. Ενώ μπορεί να γίνει τοπικός παραλληλισμός σε ενδιάμεσο στάδιο του γενικού υπολογισμού. Το πρόγραμμά μας κάνει χρήση του αρχικού μας αλγόριθμου ο περιορισμός των συνόλων μερικής διάταξης ο οποίος βασίζεται στην έννοια της κανονικοποίησης, η οποία έχει και το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Γίνεται χρήση και της έννοιας της δυϊκότητας, για να αποφευχθούν διπλοί υπολογισμοί. Οι χρόνοι που παραθέτουμε στον επόμενο πίνακα έχουν υπολογιστεί με ένα Core i7 620M που τέθηκε στη συχνότητα 2.2GHz με RAM: 8GB DDR3 1066 MHz όσον για το Disk πρόκειται για : Kingston SSDNOW VSeries 64GB.

η	Μέγεθος Αρχείου Εισόδου	Χρησιμοποίηση RAM	Χρόνος Ανάγνωσης (sec)	Χρόνος Επεξεργασίας (sec)	Χρόνος Αποθήκευσης (sec)	Συνολικός Χρόνος (sec)
4	128 B	320 KB	0	0	0	0
5	756 B	320 KB	0	0	0	0
6	5,27 KB	328 KB	0	0	0	0
7	45,9 KB	396 KB	0	0	0	0
8	498 KB	1,1 MB	0	0	0	0
9	6,63 MB	10,5 MB	1	0	0	1
10	115 MB	172 MB	13	9	0	22
11	2,48 GB	328 MB	197	136	0	333
12	47 GB	382 MB	5809	4344	24	10177

Είναι η πρώτη φορά που πετυχαίνεται ο υπολογισμός της ακολουθίας για $n=12$. Το αποτέλεσμα ενισχύει την εικασία H, αλλά και αναδεικνύει την δυσκολία του υπολογισμού λόγω της ίδιας της δομής αλλά και του πληθυσμού των συνόλων μερικής διάταξης. Με άλλα λόγια, αυτά τα μικρά σύνολα έχουν ακόμα πολλές πληροφορίες να μας δώσουν, για να κατανοήσουμε πραγματικά την σπουδαιότητα του και το εύρος των εφαρμογών τους.