La coalition en théorie des jeux interprétée comme l'union en théorie des hypergroupes

P. Gazzano, N. Lygeros

Comme la notion de coalition est fondamentale en théorie des jeux, il est nécessaire de l'aborder dans notre recherche sur le plongement de cette théorie dans celles des hyperstructures via un transport de structure. Une approche élémentaire pour introduire cette méthodologie consiste à considérer le cas particulier d'un hypergroupe abélien pour créer via sa table de Cayley un tableau de la théorie des jeux avec des joueurs qui correspond aux éléments différents de l'hypergroupe initial. Afin d'illustrer ce transport de structure, nous allons donner deux exemples simples de jeux à trois joueurs qui vérifient les deux axiomes des hypergroupes, à savoir l'associativité et la reproduction. Dans la continuité de l'axiomatique établie par von Neumann et Morgenstern dans *Theory of games and economic behavior*[1], nous reprenons le formalisme sur lequel reposent les développements de la théorie des jeux.

Conformément au formalisme, nous notons
- Γ un jeu à trois joueurs,
- $I = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$ l'ensemble des joueurs,
- $S \in \mathcal{P}(I)$ une partie de I,
- v la fonction caractéristique du jeu, définie sur $\mathcal{P}(I)$ à valeur dans $\mathbb{R}$

D'après ce formalisme, la fonction caractéristique doit vérifier les deux propriétés suivantes :
- $\forall S \in I, v(-S) = -v(S)$ où $-S$ est le complémentaire de S
- $\forall S, T \in I$ tel que $S \cap T = \emptyset$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Dans la suite, nous noterons $v(\{1\}), v(\{2\})$ et $v(\{3\})$ par v_1, v_2 et v_3 ; $v(\{1,2\}), v(\{2,3\})$ et $v(\{1,3\})$ seront respectivement notés $v_{1,2}, v_{2,3}, v_{1,3}$ et enfin, $v(I)$ sera noté $v_{1,2,3}$. Etant donné qu'une fonction caractérise complètement un jeu, nous savons que le jeu possédant la fonction caractéristique suivante est totalement déterminé :
- $v_1 = 1, v_3 = -2, v_2 = -3$
- $v_{1,2} = 2, v_{2,3} = -1, v_{1,3} = 3$
- $v_{1,2,3} = 0$

En terme d'hypergroupe, la formation d'une coalition est représentée par l'hyperopération suivante :

$$\{x\} * \{y\} = \{x, y\}$$

Au sein d'une coalition, les gains sont répartis équitablement entre chaque joueur.

1. O. Morgenstern and J. von Neumann. Theory of games and economic behavior. Princepton university press. 1944

Dans le premier jeu Γ dont la fonction caractéristique est donnée précédemment, les coalitions se forment si chacun des joueurs obtient un gain supérieur à celui qu'il obtiendrait s'il jouait seul, c'est-à-dire si $v(x, y) > 2v(x)$ et $v(x, y) > 2v(y)$. La coalition peut être codée en une structure d'hypergroupe selon l'hyperopération * suivante :

$* \equiv \cup$	{1}	{2}	{3}
{1}	{1}	{1,2}	{1,3}
{2}	{1,2}	{2}	{2,3}
{3}	{1,3}	{2,3}	{3}

La représentation du tableau démontre que * correspond exactement à l'opération de l'union $\cup$ en théorie des ensembles. Etant donné que l'union est une opération associative et abélienne, les axiomes d'associativité et de reproduction sont vérifiés. Nous obtenons donc un hypergroupe abélien. Ainsi, dans un jeu purement formel, où tous les joueurs cherchent à maximiser leur gains et ont intérêt à se coaliser entre eux, l'opération de coalition se traduit par l'union formelle en théorie des ensembles.

Dans le second exemple dont la fonction caractéristique est la suivante :
- $v_1 = 2, v_3 = -1, v_2 = -3$
- $v_{1,2} = 1, v_{2,3} = -2, v_{1,3} = 3$
- $v_{1,2,3} = 0$

Γ est un jeu coopératif à trois joueurs à somme nulle dans lequel chacun des joueurs va chercher à maximiser le gain de l'autre. Nous définissons enfin l'hypergroupe suivant associé au jeu Γ grâce à l'hyperopération définie par le tableau suivant :

*	{1}	{2}	{3}
{1}	{1}	{1,2}	{1,3}
{2}	{1,2}	{1,2}	{1,2,3}
{3}	{1,3}	{1,2,3}	{1,3}

L'explication en termes de théorie des jeux de l'hyperopération * est la suivante :

- Si {1} joue seul, alors {2} et {3} ne se coaliseront pas avec lui car {1} obtient un gain supérieur en jouant seul qu'en jouant avec {2} ou avec {3} (et même qu'avec {2} et {3} dans une même coalition). Nous avons donc $\{1\} * \{1\} = \{1\}$.

- Si {1} se coalise avec {2} (formant la coalition $\{1, 2\}$ et gagnant chacun 0.5), alors {3} ne viendra pas se coaliser avec $\{1, 2\}$ car ils gagneraient dans ce cas 0 tous les trois, qui est gain inférieur au précédent. Nous avons donc $\{1\} * \{2\} = \{1, 2\}$.

- Si {1} se coalise avec {3} (formant la coalition $\{1, 3\}$ et gagnant chacun 1.5), alors {2} ne viendra pas se coaliser avec $\{1, 3\}$ car ils gagneraient dans ce cas 0 tous les trois, qui est gain inférieur au précédent. Nous avons donc $\{1\} * \{3\} = \{1, 3\}$.

- Si $\{2\}$ joue seul, alors comme son gain de -3 est inférieur au gain qu'il obtiendrait avec $\{1\}$, ce dernier va se coaliser avec $\{2\}$ afin de lui faire accroître son gain. Mais $\{3\}$ ne va pas venir se coaliser avec $\{2\}$ car s'il laisse $\{1\}$ se coaliser, $\{2\}$ aura un gain supérieur. Enfin, $\{3\}$ ne va pas venir s'ajouter à la coalition $\{1,2\}$ pour les mêmes raisons. Nous avons $\{2\} * \{2\} = \{1,2\}$.

- Si $\{2\}$ et $\{3\}$ jouent ensemble, ils gagnent un gain de -1 chacun. De ce fait, $\{1\}$ va venir s'ajouter à la coalition $\{2,3\}$, leur permettant de gagner 0 chacun. Nous avons donc $\{2\} * \{3\} = \{1,2,3\}$.

- Si $\{3\}$ joue seul, alors pour les mêmes raisons que pour $\{2\}$, nous avons $\{3\} * \{3\} = \{1,2\}$.

D'un point de vue des hypergroupes, le joueur $\{1\}$ étant présent dans toutes les situations, l'axiome de reproduction et d'associativité sont respectés, comme le montre l'exemple suivant :
-axiome d'associativité :

$$(\{1\}*\{2\})*\{3\} = \{1,2\}*\{3\} = \{1\}*\{3\} \cup \{2\}*\{3\} = \{1,3\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$$
$$\{1\}*(\{2\}*\{3\}) = \{1\}*\{2,3\} = \{1\}*\{2\} \cup \{1\}*\{3\} = \{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\}$$

donc $(\{1\} * \{2\}) * \{3\} = \{1\} * (\{2\} * \{3\})$

-axiome de reproduction :

$\{2\}*I = \{2\}*\{1,2,3\} = \{2\}*\{1\} \cup \{2\}*\{2\} \cup \{2\}*\{3\} = \{1,2\} \cup \{1,2\} \cup \{1,2,3\} = I * \{2\}$

Nous donnons enfin un troisième exemple de jeu à trois joueurs dont la fonction caractéristique est la suivante :
- $v_1 = 1.5, v_2 = 1, v_3 = 1$
- $v_{1,2} = 0, v_{1,3} = 1, v_{2,3} = 2$
- $v_{1,2,3} = 3$

Nous modifions cependant les règles :
- le jeu n'est plus à somme nulle
- si $\{x\}$ et $\{y\}$ se coalisent ensemble, alors le troisième joueur n'a pas le droit de se joindre à la coalition. Il est impossible d'avoir la situation $\{x\} * \{y\} = \{x,y,z\}$, ni $\{x\} * \{y\} = \{x,z\}$. En revanche, il est envisageable pour deux joueurs de se coaliser avec le troisième si ce dernier décide de jouer seul, et on peut avoir $\{x\} * \{x\} = \{x,y,z\}$

Considérons maintenant l'hyperopération suivante :

*	{1}	{2}	{3}
{1}	{1}	{2}	{3}
{2}	{2}	{1,2,3}	{2,3}
{3}	{3}	{2,3}	{1,2,3}

L'explication en termes de théorie des jeux de l'hyperopération * est la suivante :

Etude de $\{1\} * \{1\}$:
- $2v_1 \geq v_{1,2}$: $\{1\}$ n'a pas d'intérêt à accepter une coalition avec $\{2\}$ (car il lui ferait baisser son gain)
- $2v_1 \geq v_{1,3}$: $\{1\}$ n'a pas d'intérêt à accepter une coalition avec $\{3\}$ (pour les mêmes raisons que précédemment)
- $3v_1 \geq v_{1,2,3}$: $\{1\}$ n'a pas d'intérêt à accepter une coalition avec $\{2\}$ et $\{3\}$ (pour les mêmes raisons que précédemment)

Donc $\{1\} * \{1\} = \{1\}$

Etude de $\{1\} * \{2\}$:
- $2v_2 \geq v_{1,2}$: $\{1\}$ n'apporte rien à $\{2\}$ par une coalition.
- d'après la règle du jeu, le joueur $\{3\}$ ne peut pas participer à une coalition avec $\{2\}$ (étant donné qu'il s'agit ici d'une coalition potentielle entre $\{1\}$ et $\{2\}$)

Donc $\{1\} * \{2\} = \{2\}$

Etude de $\{1\} * \{3\}$:
- $2v_3 \geq v_{1,3}$: $\{3\}$ n'a pas d'intérêt à accepter une coalition avec $\{1\}$ (car il lui ferait baisser son gain)
- d'après la contrainte, le joueur $\{2\}$ ne peut pas participer à une coalition avec $\{1\}$ (étant donné qu'il s'agit ici d'une coalition potentielle entre $\{1\}$ et $\{3\}$)

Donc $\{1\} * \{3\} = \{3\}$

Etude de $\{2\} * \{2\}$:
- Etant donné que $v_{1,2,3} \geq 3v_2$, $2v_{1,2,3} \geq 3v_{1,2}$ et $2v_{1,2,3} \geq 3v_{3,2}$, $\{2\}$ à intérêt à se coaliser avec $\{1\}$ et $\{3\}$, mais il ne faut pas que $\{2\}$ se coalise uniquement avec $\{1\}$ ou uniquement avec $\{3\}$ car dans ce cas, il aurait un gain inférieur au gain précédent.

Donc $\{2\} * \{2\} = \{1, 2, 3\}$

Etude de $\{2\} * \{3\}$:
- Etant donné que $2v_{2,3} \geq v_3$ et $2v_{2,3} \geq v_2$, $\{2\}$ et $\{3\}$ ont intérêt à se coaliser entre eux. Enfin, d'après la règle du jeu, $\{1\}$ ne peut pas les joindre dans une même coalition. Donc $\{2\} * \{3\} = \{2, 3\}$

Donc $\{2\} * \{3\} = \{2, 3\}$

Etude de $\{3\} * \{3\}$:
- Comme $v_{1,2,3} \geq 3v_3$, $2v_{1,2,3} \geq 3v_{1,3}$ et $2v_{1,2,3} \geq 3v_{3,2}$, $\{3\}$ a intérêt à se coaliser avec $\{1\}$ et $\{2\}$, mais il ne faut pas que $\{3\}$ se coalise uniquement avec $\{1\}$ ou uniquement avec $\{2\}$

Donc $\{3\} * \{3\} = \{1, 2, 3\}$

L'hypergroupe défini par le troisème jeu est un hypergroupe canonique d'ordre 3.