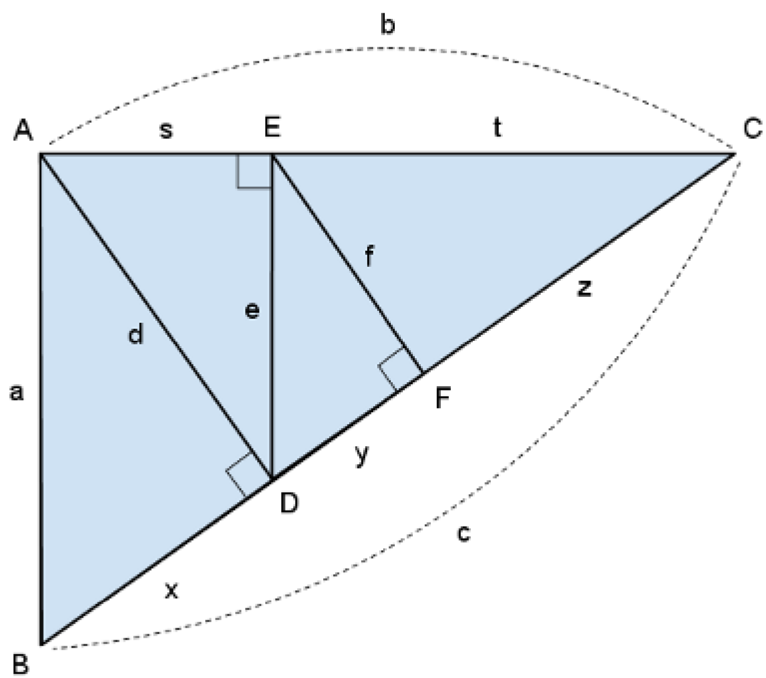
Sur les triangles sumériens

N. Lygeros, O. Rozier

1. Introduction.

Notre ami Michel Marec nous a offert une copie d'une tablette d'argile recouverte de caractères cunéiformes qui date d'environ 2000 ans avant Jésus-Christ. Cette tablette comporte des calculs de hauteurs dans une série de triangles rectangles emboîtés. Michel Marec et Pierre Saintier ont étudié ces calculs et ont montré que même s'ils n'étaient pas tous explicites, ils ne comportaient pas d'erreur; fait qui leur a fait suggérer qu'il s'agissait du travail d'un maître. Dans leurs commentaires concernant les raisonnements sumériens, ils remarquent que le triangle rectangle principal de côtés 45, 60 et 75, est un triangle bien particulier, de côtés proportionnels à 3, 4 et 5, ce qui limite peut-être la portée des raisonnements tenus par l'auteur. Cette phrase nous a intrigués et nous nous sommes mis à examiner toutes les longueurs des différentes hauteurs des triangles rectangles emboîtés.



2. Calculs préliminaires.

Nous nous sommes aperçus qu'en dehors des longueurs initiales AB=45, AC=60 et BC=75, il existe une autre longueur entière à savoir AD=36 qui engendre par conséquence, BD=27 et DC=48. Ainsi nous avons deux autres triangles rectangles : ABD de côtés 27, 36 et 45, et ACD de côtés 36, 48 et 60 qui sont eux-mêmes des triangles proportionnels au triangle de côtés 3, 4 et 5. En fait, le triplet (3,4,5) a été multiplié par 9 pour obtenir le triplet (27, 36, 45), à savoir le triangle rectangle ABD, par 12 pour obtenir le triplet (36, 48, 60), à savoir le triangle rectangle ACD, et par 15 pour obtenir le triangle rectangle initial ABC. Cette propriété tout à fait remarquable n'est pas satisfaite par le côté DE qui n'est pas entier. Aussi nous nous sommes posés la question suivante : est-il possible de construire un triangle rectangle analogue à celui de la tablette avec tous les éléments de longueur entiers ? Plus précisément, nous désirons avoir comme longueurs entières : AB, AC, BC, AD, BD, AE, DE, EF, DF, CE et CF. Nous nommerons triangle sumérien un tel triangle initial ABC.

3. Analogie sur les triangles pythagoriciens

Le problème analogue à notre question mais cette fois sur les triangles pythagoriciens de côtés a, b et c, se résout grâce au système d'équations suivant :

$$a = n\,(p^2 - q^2)$$
$$b = 2\,n\,p\,q$$
$$c = n\,(p^2 + q^2)$$

4. Construction explicite de triangles sumériens

Pour plus de facilité dans les calculs, nous noterons :
a=AB, b=AC, c=BC, d=AD, e=DE, f=EF, s=AE, t=CE, x=BD, y=DF et z=CF.
Le système d'équations suivant permet de résoudre de manière générique notre question et ainsi construire des triangles sumériens à volonté, en plaçant des entiers dans les paramètres n, p et q.

$$a = n\,(p^2 - q^2)\,(p^2 + q^2)^3$$
$$b = 2\,n\,p\,q\,(p^2 + q^2)^3$$
$$c = n(p^2 + q^2)^4$$
$$d = 2\,n\,p\,q\,(p^2 - q^2)\,(p^2 + q^2)^2$$
$$e = 4\,n\,p^2 q^2\,(p^2 - q^2)\,(p^2 + q^2)$$
$$f = 8\,n\,p^3 q^3\,(p^2 - q^2)$$
$$s = 2\,n\,p\,q\,(p^2 - q^2)^2\,(p^2 + q^2)$$
$$t = 8\,n\,p^3 q^3\,(p^2 + q^2)$$
$$x = n(p^2 - q^2)^2\,(p^2 + q^2)^2$$
$$y = 4\,n\,p^2 q^2 (p^2 - q^2)^2$$
$$z = 16\,n\,p^4 q^4$$

Référence

M. Marec et P. Saintier : Un exemple de calcul babylonien. Revue de l'Ecole Polytechnique. p. 22-25, 1979.