Η απόδειξη του Fürstenberg περί απείρου πλήθους πρώτων αριθμών

Ν.Λυγερος

Μέσα στο πλαίσιο των Master Classes προσπαθήσαμε να αναδείξουμε την τοπολογία που παραμένει σχεδόν άγνωστη ενώ είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία των Μαθηματικών. Ένα πανέμορφο παράδειγμα της δύναμης της τοπολογίας ακόμα και εκτός του φυσικού της χώρου, το οποίο είναι σχετικά κατανοητό από όσους έχουν την ελάχιστη παιδία στα Μαθηματικά, είναι η απόδειξη του Fürstenberg περί απείρου πλήθους πρώτων αριθμών. Γνωρίζουμε όλοι την κομψή απόδειξη του Ευκλείδη και μερικοί την έντεχνη του Euler. Σε αυτή την απόδειξη, η διαφορά προέρχεται από την τοπολογία, η οποία προσφέρει μια εντελώς διαφορετική ματιά στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Ο Fürstenberg την επινόησε το 1955 και λειτουργεί με τον εξής τρόπο. Ορίζει μια τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{Z}$, θέτοντας ότι ένα υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{Z}$ είναι ανοιχτό αν και μόνο αν είναι είτε το κενό σύνολο, είτε η ένωση των αριθμητικών ακολουθιών S(a, b) (για $a \neq 0$) όπου $S(a, b)=\{an+b/\ n\in\mathbb{Z}\}=a\mathbb{Z}+b$. Για τους ποιο ειδικούς αυτό θυμίζει τη θεματολογία του Dirichlet, την εικασία του Hardy και το θεώρημα του Green – Tao. Εδώ όμως το θέμα μας είναι απλούστερο. Χρειαζόμαστε απλώς να εξετάσουμε την ισχύ των αξιωμάτων της τοπολογίας και αυτό γίνεται απλά. Εξ ορισμού το κενό είναι ανοιχτό. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ ερμηνεύεται ως $1\cdot\mathbb{Z}+0=S(1, 0)$ και είναι ανοιχτό. Για μία συλλογή ανοιχτών συνόλων U_i και x στην ένωσή τους U, καθένας από τους αριθμούς a_i για τους οποίους $S(a_i, x) \subseteq U$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι κάθε ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτή. Έστω U_1 U_2 δύο ανοιχτά σύνολα που σχετίζονται με τους αριθμούς a_1 και a_2 , τότε $S(a, x) \subseteq S(a_i, x) \subseteq U_i$ άρα η κοινή τομή δύο ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτή. Τώρα αφού ισχύει η έννοια της τοπολογίας ας εξετάσουμε τις δύο σημαντικές ιδιότητες αυτής, τις οποίες ανέδειξε ο Fürstenberg. Κάθε ανοιχτό σύνολο διαφορετικό του κενού εμπεριέχει ένα άπειρο πλήθος ακολουθιών, κατά συνέπεια κανένα πεπερασμένο σύνολο δεν μπορεί να είναι ανοιχτό. Δηλαδή, το συμπληρωματικό ενός πεπερασμένου συνόλου δεν μπορεί να είναι κλειστό. Επιπλέον τα σύνολα S(a, b) είναι και ανοιχτά και κλειστά. Είναι ανοιχτά εξ ορισμού. Και τα σύνολα S(a, b) μπορούν να ερμηνευτούν ως το συμπληρωματικό ενός ανοιχτού συνόλου με τον εξής τρόπο:

$$\mathrm{S(a,b)} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{j=1}^{a-1} \mathrm{S(a, b+j)}$$

Με αυτές τις δύο ιδιότητες θα εξετάσουμε το σύνολο $\mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\}$ το οποίο είναι και η ένωση των συνόλων $S(p, 0)$ για p πρώτο αριθμό αφού οι μόνοι ακέραιοι, οι οποίοι δεν είναι πολλαπλασιαστές ενός πρώτου αριθμού, είναι το -1 και +1.

Μέσω της πρώτης ιδιότητας το σύνολο $\mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\}$ είναι ανοιχτό. Καταλήξαμε στο άτοπο, άρα το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο. Αυτός ο τοπολογικός τρόπος προσέγγισης του θέματος, το οποίο ανήκει στη θεωρία αριθμών, προσφέρει πολλές δυνατότητες στην έρευνα αλλά και στη διδακτική των Μαθηματικών. Γι’ αυτό τούτο το παράδειγμα είναι ιδανικό για Master Class Τοπολογίας.