Puissance autoréférente d'un quaternion unitaire imaginaire pur

N. Lygeros

Considérons les relations quaternioniques établies par Hamilton, à savoir :

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

Comme tout quaternion a la forme polaire suivante : $q = \rho e^{\theta s} = \rho(\cos(\theta s) + \sin(\theta s))$ où $\rho = \|q\|$ est un nombre réel positif et $\theta =$ un nombre réel alors que s est un quaternion unitaire imaginaire pur, nous pouvons généraliser la formule d'Euler sur la puissance autoréférente de i, à savoir

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

En effet, chaque quaternion unitaire imaginaire pur peut s'écrire de la manière suivante :

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}},\ j = e^{j\frac{\pi}{2}}, k = e^{k\frac{\pi}{2}}$$

Car nous avons globalement $s = e^{s\frac{\pi}{2}}$

Aussi nous pouvons écrire :

$$s^s = \left(e^{s\frac{\pi}{2}}\right)^s = e^{s^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi nous obtenons

$$\boxed{i^i = j^j = k^k = e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

De la même manière nous avons :

$$\boxed{i^{jk} = j^{ik} = k^{ij} = e^{-\frac{\pi}{2}}}$$