Construction de quaternions et d'octonions

N. Lygeros

A partir du moment où nous réalisons qu'il est possible de construire les nombres complexes via une méthodologie matricielle, i.e.

Représentation de $z = a + ib$ via la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

il est possible d'appliquer un raisonnement analogue pour construire les quaternions d'Hamilton et les octonions de Cayley. Il est aussi possible de réaliser cela d'une manière encore plus compacte en exploitant l'étape antérieure.

Ainsi si nous utilisons les nombres réels nous avons

$$\mathbb{H} \mapsto End_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

Aussi le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ peut-être représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Tandis que si nous utilisons les nombres complexes nous avons

$$\mathbb{H} \mapsto End_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

et le quaternion est représenté par $M_q \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix}$

De manière analogue, via la méthode de Cayley-Dickson, il est possible de représenter un octonion comme un couple de quaternions. Cette fois, nous avons : $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{O}$ et la multiplication dans les octonions a la forme suivante :

$(a,b) \bullet (c,d) = \left(ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb\right)$ où $\bar{a}, \bar{b}$ sont les conjugués respectifs de a, b.