Remarques sur les nombres LR(p,2p+1) et LR(2p+1,p)

N. Lygeros, O. Rozier

Les nombres $LR(p,q)$ avec p et q nombre premiers impairs sont définis comme suit $LR(p,q)=\tau\left(p^{q-1}\right)$ où $\tau\left(n\right)$ est la fonction de Ramanujan qui correspond aux coefficients de Fourier du discriminant modulaire Δ de la manière suivante:

$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{+\infty}\tau(n)q^n$ où $q=e^{2\pi iz}$ et z appartient au demi-plan supérieur complexe. Si nous avons p et $2p+1$ qui sont premiers, alors p est un nombre premier de Sophie Germain. Les premiers nombres de ce type sont 2,3,5,11,23,29,41,53,83,89…

Ainsi les nombres $LR(p,2p+1)$ et $LR(2p+1,p)$ correspondent à l'application de la fonction de Ramanujan sur les nombres de Sophie Germain.

Grâce à la théorie des suites de Lucas nous avons les propriétés suivantes pour les nombres LR.

$LR(p,q)=\left(\frac{Dp}{q}\right)[q]$ où $Dp=\tau(p)^2-4p^{11}$

$q\nmid p.\tau(p)\Rightarrow q\,|\,LR\left(p,q-\left(\frac{Dp}{q}\right)\right)$

$LR(p,2n+1)=LR(p,n+1)^2-p^{11}LR(p,n)^2$

Où n est un entier positif et p,q deux nombres premiers impairs. Aussi nous pouvons écrire $LR(p,2p+1)$ de la manière suivante:

$LR(p,2p+1)=LR(p,p+1)^2-p^{11}LR(p,p)^2$

Comme p et $2p+1$ sont premiers nous nous intéressons aux divisibilités

$2p+1\,|\,\tau(p)$ et $p\,|\,\tau(p+1)$

Faits 1 : . $7\,|\,\tau(3)$

$\tau(3)=252=7\times 36$

. $23\,|\,\tau(11)$

$\tau(11)=534612=23\times 23244$

Calculs 1: $11 < p \leq 10^5, \quad 2p+1 \nmid \tau(p)$

Faits 2 : $.\, 2 \mid \tau(5)$

$\tau(5) = 4830 = 2 \times 2415$

$.\ 29 \mid \tau(59)$

$\tau(59) = -5189203740 = 29 \times 178938060$

$.\ 53 \mid \tau(107)$

$\tau(107) = 90241258356 = 53 \times 1702665252$

Calculs 2 : $53 < p \leq 10^5 : p \nmid \tau(2p+1)$