

Η εικασία του Bieberbach Ν. Αυγερός

Με αφορμή την ανακάλυψη της επιστολής του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή στον Ludwig Bieberbach και για να φανεί τουλάχιστον από ένα σημείο το μέγεθος του τελευταίου στα Μαθηματικά, παρουσιάζουμε την εικασία που έκανε το 1916, δηλαδή πριν εκατό χρόνια, για την οποία γράφτηκαν περισσότερο από 1000 μελέτες για να αποδειχτεί τελικά από τον Louis de Branges το 1984.

Εικασία του Bieberbach: Για κάθε συνάρτηση $f : z \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, μονοσήμαντη στον μοναδιαίο δίσκο του \mathbb{C} , και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, έχουμε $|a_n| \leq n |a_1|$.

Ο ίδιος ο Bieberbach είχε αποδείξει την εικασία του για $n=2$. Και βρήκε το ανώτατο όριο της ανισότητας. Στη συνέχεια για πολλά χρόνια, η εικασία αποδείχτηκε για $n \leq 6$. Το 1984, ο Louis de Branges κατάφερε να μετατρέψει την απόδειξη της εικασίας στην πιστοποίηση ότι μερικά πολυώνυμα εντελώς προσδιορισμένα είναι θετικά στο $[0,1]$. Ο Gautschi το επιβεβαίωσε με υπολογιστή για $n \leq 25$ και μετά αντιλήφθηκε ότι οι Askey και Gasper είχαν αποδείξει τη θετικότητα αυτών των πολυωνύμων το 1976. Επειδή όμως η απόδειξη ήταν αρκετά μεγάλη, μερικά σημεία έπρεπε να διευκρινιστούν και αυτό έγινε σ' ένα σεμινάριο στο Ινστιτούτο Steklov. Έτσι χάρη στους Emelianov, Kuzmine και Millin, η απόδειξη συντομεύτηκε, επιβεβαιώθηκε και δημοσιεύθηκε. Χρειάστηκαν λοιπόν σχεδόν εβδομήντα χρόνια για να αποδειχθεί η εικασία του Bieberbach που είχε δει τη σημασία της.