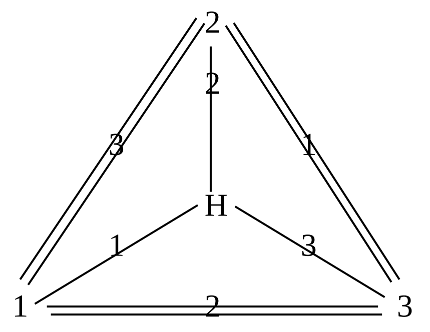
Sur l'hypergroupe mousquetaire et la métrique de Carathéodory en théorie des jeux

P. Gazzano, N. Lygeros

Soit l'hypergroupe mousquetaire:

*	1	2	3
1	H	3	2
2	3	H	1
3	2	1	H



Soit le jeu coopératif $(N,v)=((H,*),v)$ où v est une mesure extérieure de Carathéodory sur $P(N)$, mais qui vérifie de plus $v(S*T)\geq v(S\cup T)$ où S et T sont des éléments de $P(N)$. Si S et T sont distincts $v(S*T)\geq v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$ alors:

$v(1*2)\geq v(\{1,2\})$

$v(2*3)\geq v(\{2,3\})$

$v(1*3)\geq v(\{1,3\})$

Pour tout i,j, $v(i*j)=v(k)\geq v(\{i,j\})\geq v(i)+v(j)$

Donc :

$v(1)\geq v(2)+v(3)$

$v(2)\geq v(1)+v(3)$

$v(3)\geq v(1)+v(2)$

En sommant les trois inégalités, $0\geq v(2)+v(3)+v(1)\geq 0$ et donc $v(1)=v(2)=v(3)=0$. Alors $v(1)=v(2*3)\geq v(\{2,3\})$ et donc $v(\{2,3\})=0$. En généralisant

$$v(1)=v(2)=v(3)=v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=0$$

De plus, l'axiome de reproduction donne:

$v(H) = v(H * H) \geq v(H \cup H) = v(H)$

Comme les axiomes de la mesure et de l'hypergroupe n'impliquent pas la nullité de $v(H)$, on peut alors poser $\forall C \in P(N), v'(C) = \dfrac{v(C)}{v(H)}$. v' est une indicatrice avec $v'(H) = 1 (= v'(N))$.

Cette indicatrice correspond a un jeu parfaitement défini dans les jeux coopératifs: les jeux simples, pour lequels $v(S) = 1$ ou 0 et $v(N) = 1$. Une coalition S pour laquelle $v(S) = 1$ s'appelle une coalition gagnante. Et l'intersection des coalitions gagnantes s'appelle les joueurs-veto, s'il elle est non-vide. Un jeu sans joueur-veto possède un noyau vide.