Analyse stratégique du Jeu de Frank

P. Gazzano, N. Lygeros

Dédié à Frank Ramsey

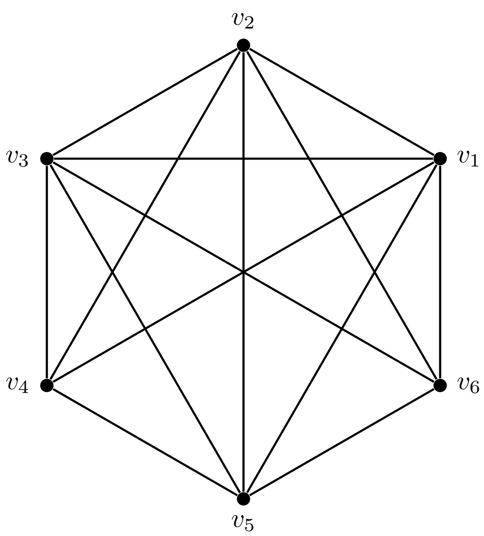
1 Introduction

Deux joueurs ayant chacun une couleur (rouge ou bleu) doivent tour à tour colorier une arête de K_6 sans créer de triangle monochromatique. Ils ont chacun 7 coups à jouer. Les joueurs ne peuvent pas colorier une arête déjà coloriée. Le jeu se termine lorsqu'un des joueurs est obligé de faire un K_3 monochromatique ou s'ils ont joué tous leurs coups.

2 Formalisation mathématique

2.1 Notations issues de la théorie des graphes

Soit le graphe complet K_6. L'ensemble des sommets sera noté $G(K_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, et l'ensemble des arêtes sera noté $E(K_6) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, ..., e_{15}\}$. Si G' est un sous-graphe, on appelle $E(G')$ les arêtes de G'. On appelle $G[a_1, a_2, a_3]$ le graphe engendré par les arêtes a_1, a_2 et a_3. Etant donné un sous graphe G', on partitionne $E(G')$ en deux couleurs : $\forall G' \subset K_6$, $E_r(G')$, respectivement $E_b(G')$, est l'ensemble des arêtes rouges, respectivement bleues, et $E_r(G') \cup E_b(G') = E(G')$.



2.2 Notations issues de la théorie des jeux

Etant donné que les joueurs jouent de manière alternée et que l'information est parfaite, nous nous plaçons dans le formalisme des jeux sous forme extensive à information parfaite et à horizon fini $< N, (A_i)_{i \in N}, H, Z, P, (\succ_i)_{i \in N} >$:

- N : nombre de joueurs
- A_i : actions du joueur i
- H : ensemble des histoires : $(a_i)_{i=1...k} \in H \Rightarrow \forall l < k, (a_i)_{i=1...l} \in H$ avec $a_i \in A_j$
- P : fonction qui a toute histoire non terminale associe un joueur : $P(h)$ est le joueur à qui c'est le tour de jouer.

- Z : ensemble des histoires terminales $\forall h \in Z, P(h) = \emptyset$
- $\{\succ_i\}_{i \in N}$: préférences des joueurs

Application :

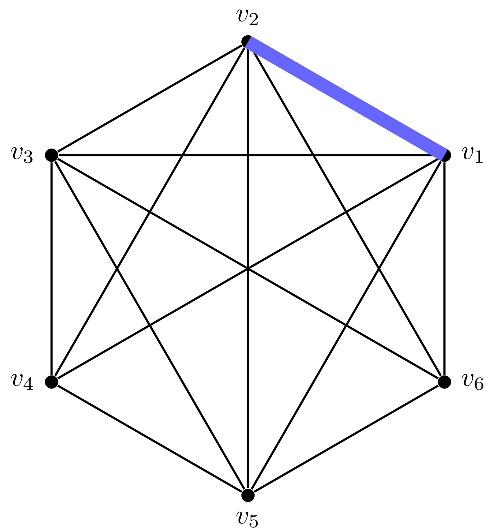
- $N = \{B, R\}$
- A_B : choix d'une arête libre, attribution de la couleur bleue et construction d'un sur-graphe, de manière à ne pas avoir un K_3 bleu dans K_6.
- A_R : choix d'une arête libre, attribution de la couleur rouge et construction d'un sur-graphe, de manière à ne pas avoir un K_3 rouge dans K_6.
- H : ensemble des sous graphes bicolores de G' de K_6 qui ne contiennent pas K_3 monochrome. On appelle histoire tout sous graphe G' de G qui a été construit par les joueurs, tel que $\forall a_1, a_2, a_3 \in E(G')$, $G[a_1, a_2, a_3] \neq K_3^r$ ou $G[a_1, a_2, a_3] \neq K_3^b$

3 Déroulement du Jeu de Frank

1^{er} **tour** : B choisit une arête dans E (n'importe laquelle, en bleu dans le schéma ci-dessous)

$$s_B : \emptyset \to E$$

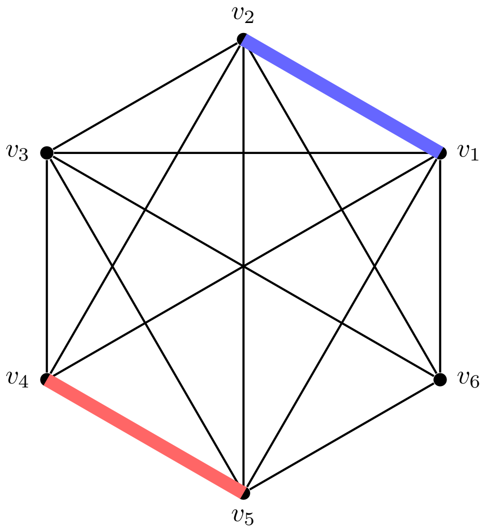
Donc B crée l'histoire $h_1 = G[s_B(\emptyset)]$:



2^{nd} **tour** : R choisit une arête dans parmi $E \backslash \{s_B(\emptyset)\}$ (en rouge dans le schéma ci-dessous)

$$s_B : h_1 \to E \backslash \{s_B(\emptyset)\}$$

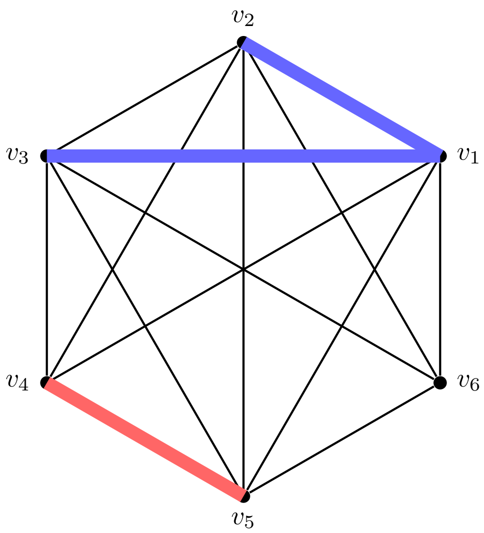
et R crée l'histoire $h_2 = G[s_B(\emptyset), s_R(G[s_B(\emptyset)])]$:



3^{eme} **tour** : B choisit une arête parmi $E\backslash\{s_B(\emptyset), s_R(G[s_B(\emptyset)])\}$ (en bleu dans le schéma ci-dessous)

$$s_B : h_2 \to E\backslash\{s_B(\emptyset), s_R(G[s_B(\emptyset)])\}$$

tel que $\forall x, y, z \in E_b(G[s_B(\emptyset), s_R(G[s_B(\emptyset)]), s_B(G[s_B(\emptyset), s_R(G[s_B(\emptyset)])])])$, $G[x, y, z] \neq K_3^b$
Donc B crée l'histoire : $h_3 = G[s_B(\emptyset), s_R(G[s_B(\emptyset)]), s_B(G[s_B(\emptyset), s_R(G[s_B(\emptyset)])])]$

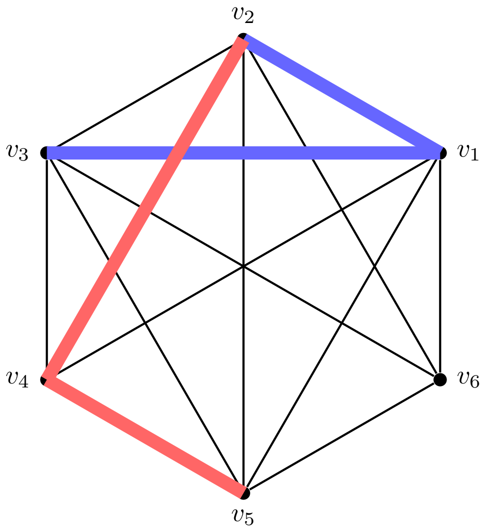


A partir de maintenant, on appelle, si p est pair : $S_p = G[s_B(\emptyset), s_R(S_1), \ldots, s_R(S_{p-1})]$ et si p est impair : $S_p = G[s_B(\emptyset), S_R(S_1), \ldots, s_B(S_{p-1})]$

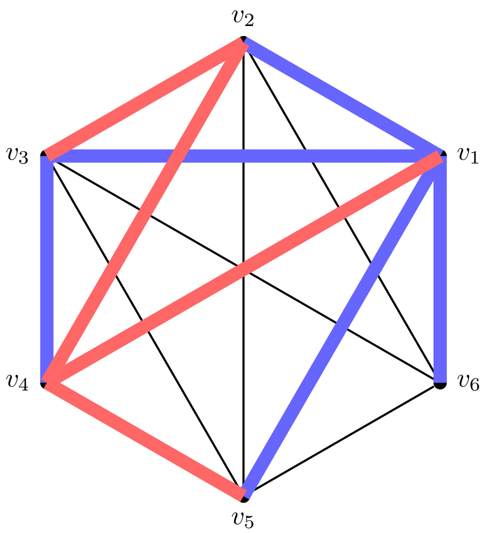
4^{eme} **tour** : R choisit une arête parmi $E\backslash\{S_3\}$ (en rouge dans le schéma ci-dessous)

$$s_R : h_3 \to E\backslash\{S_3\}$$

tel que $\forall x, y, z \in E_r(G[S_3, s_R(S_3)]), G[x, y, z] \neq K_3^r$, et R crée l'histoire $h_4 = G[S_3, s_R(S_3)]$.



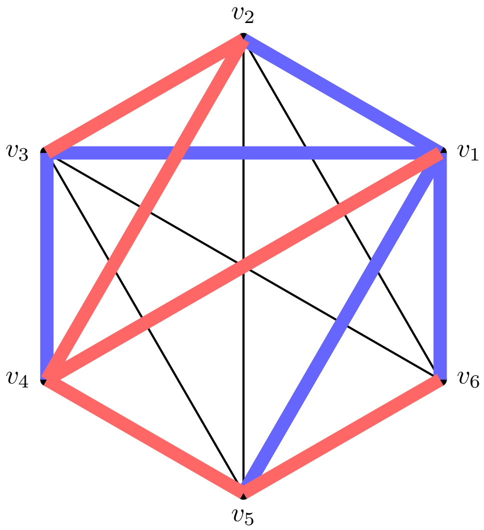
n^{eme} **tour** : Supposons que c'est R qui joue, et que l'on soit dans cette configuration :



Alors R choisit une arête parmi $E\backslash\{S_{n-1}\}$, et ne peut pas choisir l'arête v_5v_2.

$$s_R : h_{n-1} \to E\backslash\{S_{n-1}\}$$

tel que $\forall x, y, z \in E_r(G[S_{n-1}, s_R(S_{n-1})]), G[x, y, z] \neq K_3^r$, et R crée l'histoire $h_n = G[S_{n-1}, s_R(S_{n-1})]$


v_2
v_3
v_1
v_4
v_6
v_5