Analyse stratégique du Jeu de Frank en coopération

P. Gazzano, N. Lygeros

1 Le Jeu de Frank en cooperation

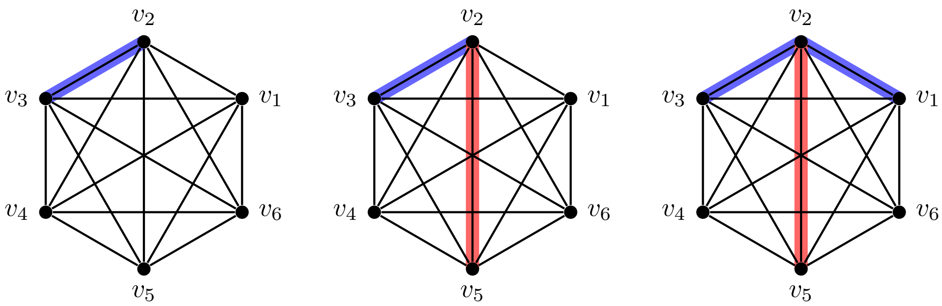
Dans cette note, nous étudions un cas particulier du Jeu de Frank dans lequel les deux joueurs cherchent à coopérer. Nous reprenons les mêmes notations que dans la note intitulée : *Analyse stratégique du Jeu de Frank*. La coopération se traduit sous forme stratégique par la complétion bicolore par un joueur d'un triangle de l'autre joueur qui serait monochrome sans cette opération. Supposons que le jeu soit à l'histoire $h_p \in H$ et que $P(h_p) = R$. La stratégie de R sera donc :

$$s_R : h_p \to E \backslash \{S_p\} \text{ tel } \exists e_1, e_2 \in E_b(h_p), G[e_1, e_2, s_R(h_p)] \sim K_3$$

Donc R colorie une arête libre en rouge, tel que le graphe $G[e_1, e_2, s_R(h_p)]$ engendré par les trois arêtes e_1, e_2 et $s_R(h_p)$ est isomorphe à K_3.

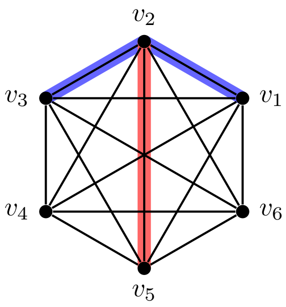
2 Exemple constructif de cooperation

Nous voyons les trois premiers coups. Bleu choisit au hasard une une arête car elles sont toutes isomorphes. Rouge choisit une arete qui a un sommet commun. Au troisième coup, Bleu choisit une arête symétrique à la première :

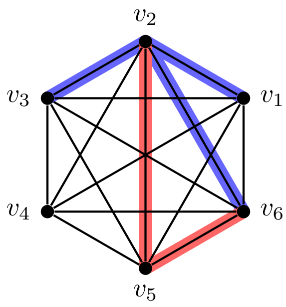


1^{er} coup 2^{nd} coup 3^{e} coup

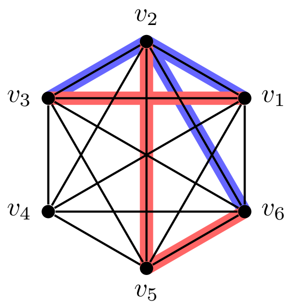
C'est au 5^e coup que l'on voit apparaître la coopération. Comme le jeu est en coopération, on sait que Rouge ne peux pas jouer en v_2v_6. Donc il faut que Bleu colorie cette arête de maniere a completer le triangle. Au 6^e coup, c'est Rouge qui doit colorier l'arête v_1v_3.



4^e coup

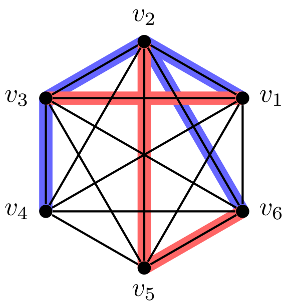


5^e coup

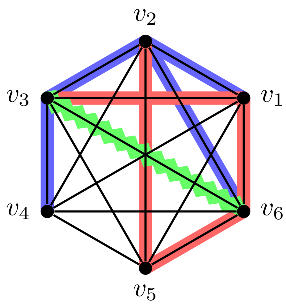


6^e coup

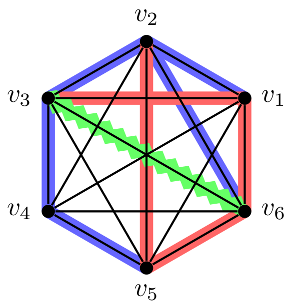
Au 7^e coup, Bleu choisit l'arête v_3v_4 car il n'existe plus de triangle possèdant deux arêtes rouges que Bleu pourrait fermer. Il est donc libre de choisir une arête non coloriée. Au 8^e Rouge choisit alors l'arête v_6v_1 de manière à fermer le triangle $v_1v_2v_6$. Une nouvelle obstruction apparaît : l'arête v_3v_6 n'est ni jouable par Bleu, ni par Rouge. Nous la colorions en vert pour montrer qu'elle est interdite aux deux joueurs. Au 9^e coup, Bleu complète le triangle $v_1v_6v_5$.



7^e coup

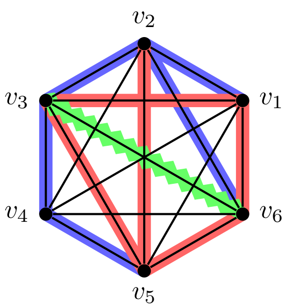


8^e coup

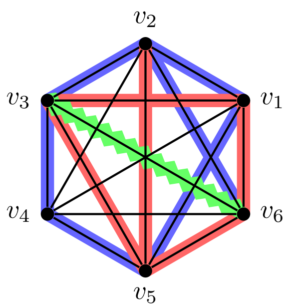


9^e coup

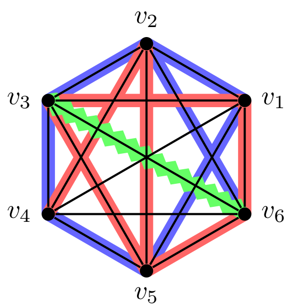
Au 10^e coup, Rouge joue v_3v_5 et au 11^e, Bleu ferme le triangle $v_1v_6v_5$. Au 12^e, Rouge complète le triangle $v_4v_3v_2$



10^e coup

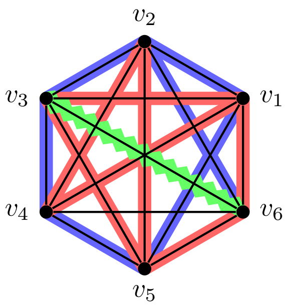


11^e coup

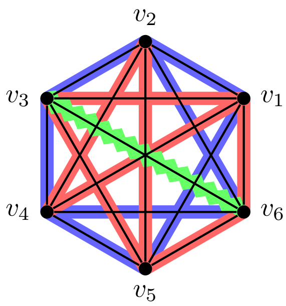


12^e coup

Au 13^e, Rouge complète le triangle $v_4v_3v_1$. Au 14^e coup, Bleu joue v_4v_6.



13^e coup



14^e coup

Après le 14^e, il n'y a plus aucun coup possible, pas de triangle monochromatique, et ils ont joué 7 coups chacun. Il s'agit d'un cas extrême car la propriété de Ramsey n'apparaît qu'au 15^e coup. Ce jeu stratégique possède des caractéristiques intéressantes sur le plan humain car il répond bien à la problématique de la coopération vitale : pour se sauver, il faut sauver l'autre. Inversement, si on veut battre l'adversaire, le risque est de s'autobloquer car nous jouons alors dans un cadre plus restreint.