

# Analyse stratégique du Jeu de Frank en non-coopération

P. Gazzano, N. Lygeros

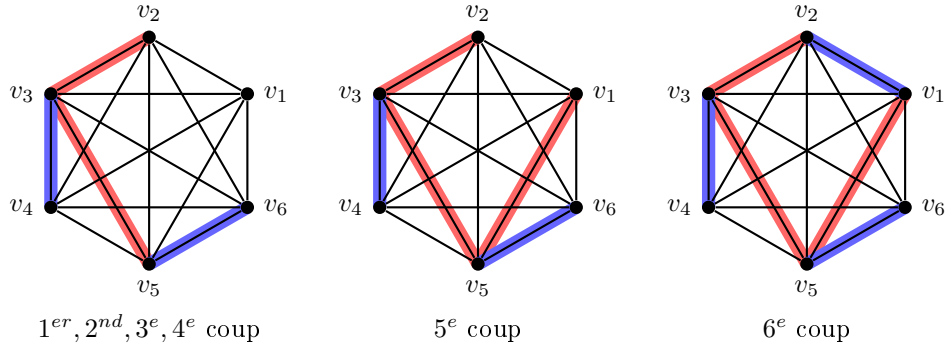
## 1 Le Jeu de Frank non-cooperatif

Dans la première note, nous avons défini le principe et les règles du Jeu de Frank, ainsi que les notations mathématiques que nous allons reprendre ici [1]. Dans la seconde note, nous avons étudié le cas du Jeu de Frank en coopération. Nous avons vu que les deux joueurs peuvent se sauver l'un et l'autre s'ils coopèrent. Plus précisément, ils jouent l'un et l'autre sept coups et ne forment pas de triangle monochromatique [2]. Le jeu aboutit à une partie nulle. Dans celle-ci, nous allons étudier le cas non-coopératif. Nous rappelons que le joueur gagnant est le joueur qui a joué le plus d'arêtes sans faire de triangle monochromatique.

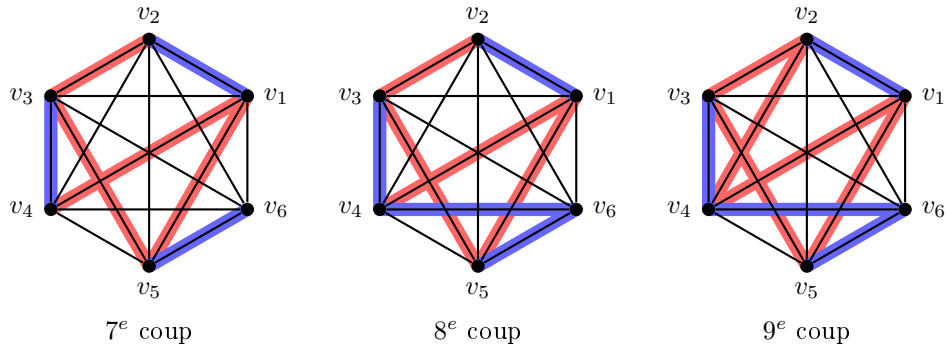
## 2 Non-coopération par obstruction

Dans cet exemple, nous prenons le cas du joueur Rouge qui cherche à tracer des circuits afin d'éviter de créer un triangle rouge monochromatique. Le joueur Bleu va donc chercher à casser ces circuits, en posant une arête bleue sur une arête adjacente à un sommet atteint par le joueur Rouge.

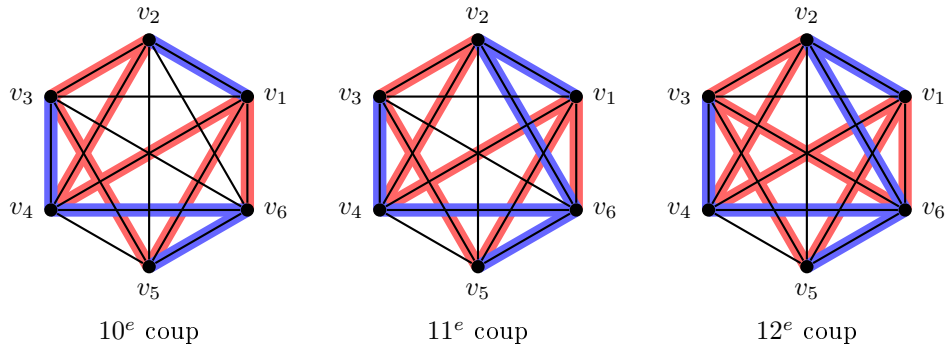
Supposons que pour les trois premiers coups, Rouge qui joue en premier, a joué  $v_2v_3$ , Bleu a joué  $v_3v_4$ , Rouge a joué  $v_3v_5$ . Comme Rouge commence à créer un circuit, Bleu va s'y opposer en jouant  $v_5v_6$ . Au 5<sup>e</sup>, Rouge continue son circuit en jouant  $v_5v_1$ . Au 6<sup>e</sup> coup, Bleu continue à faire obstruction en jouant  $v_1v_2$



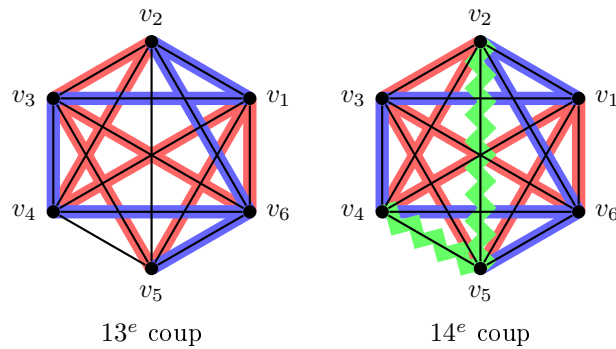
Au 7<sup>e</sup> coup, Rouge qui ne peut pas jouer  $v_1v_3$  joue  $v_1v_4$ . Au 8<sup>e</sup>, Bleu est obligé de le bloquer avec  $v_4v_6$ . Au 9<sup>e</sup>, Rouge complète son circuit maximal en jouant  $v_4v_2$ .



Au 10<sup>e</sup> Rouge ne peut pas jouer  $v_2v_5$ , mais il ne peut pas jouer  $v_4v_5$  non plus ni  $v_3v_1$ . Il reste donc  $v_1v_6$ . Au 11<sup>e</sup>, Bleu se rend compte que Rouge pourra jouer en  $v_2v_6$ , donc il va colorier cette arête. Au 12<sup>e</sup>, Rouge ne peut plus jouer que  $v_3v_6$ .



Au 13<sup>e</sup> coup, Bleu ne peut pas jouer  $v_4v_5$ , ni  $v_2v_5$ , mais peut jouer  $v_3v_1$ . Au 14<sup>e</sup> coup qui est logiquement le dernier coup, Rouge ne peut pas jouer  $v_5v_4$  ni  $v_2v_5$ .



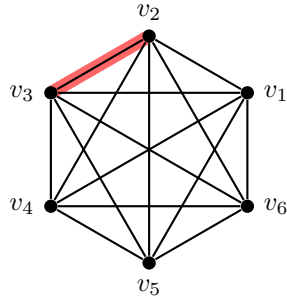
Ainsi, Rouge a trouvé une stratégie gagnante. Il a en effet trouvé une stratégie qui permet de bloquer Bleu avant la fin du jeu car bien qu'il reste deux arêtes non coloriées, Rouge en a colorié sept - le maximum qu'il puisse faire. Mais il est plus intéressant de voir que c'est en réalité Bleu qui a choisi une stratégie perdante. Bleu cherchait à faire systématiquement obstruction à Rouge, sans aucun autre objectif, et s'est retrouvé coincé.

Nous voyons donc que dans le Jeu de Frank, un joueur qui cherche à bloquer l'adversaire se trouve *in fine*, autobloqué et perd.

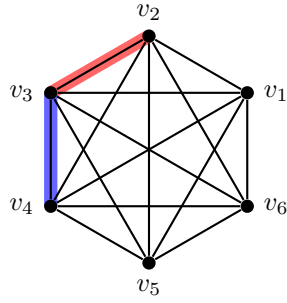
### 3 Non-coopération par copie

Dans l'exemple suivant, nous étudions le cas non-coopératif par copie. C'est-à-dire que le second joueur va chercher à copier, si les règles du jeu ne le lui interdisent pas, ce qu'a fait le joueur précédent. Le graphe rouge se superposera au graphe par rotation horaire d'un sommet. Par exemple, dans la figure 4 le graphe bleu se superpose au graphe rouge si l'on fait tourner le graphe bleu par rotation : l'arête  $v_3v_4$  devient  $v_3v_2$  et l'arête  $v_5v_6$  devient  $v_4v_5$ .

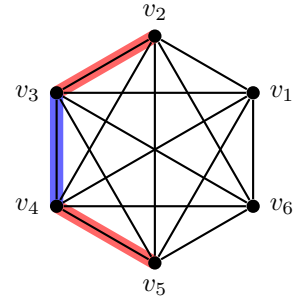
Lors des trois premiers coups, Rouge (qui à l'initiative) et Bleu jouent comme ceci.



1<sup>er</sup> coup

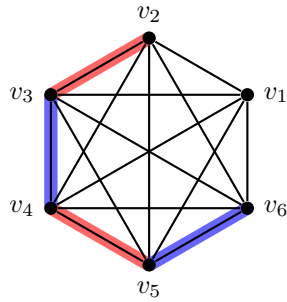


2<sup>nd</sup> coup

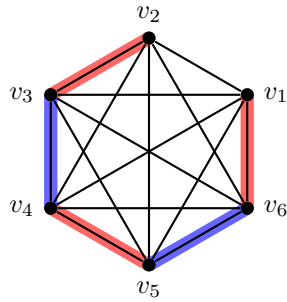


3<sup>e</sup> coup

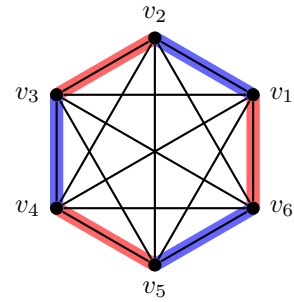
Lors des 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> coups, Bleu et Rouge colorient le bord de  $K_6$ .



4<sup>e</sup> coup

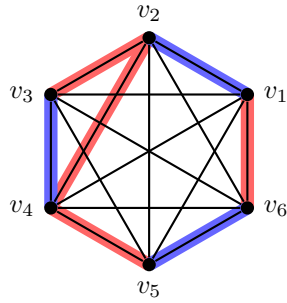


5<sup>e</sup> coup

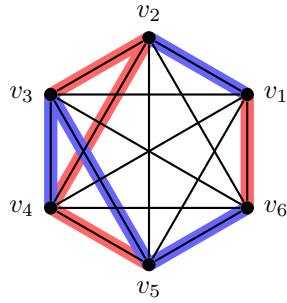


6<sup>e</sup> coup

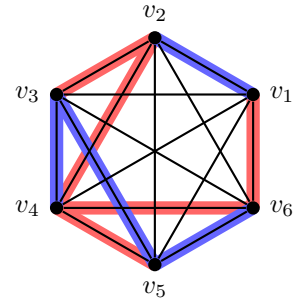
Lors des 7<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup>, 9<sup>e</sup> Rouge et Bleu continuent à jouer symétriquement.



7<sup>e</sup> coup

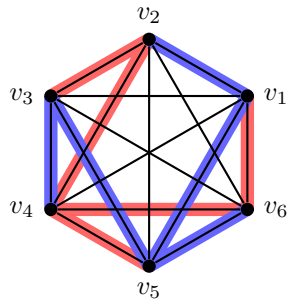


8<sup>e</sup> coup

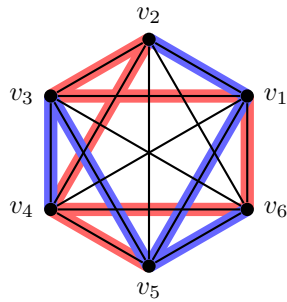


9<sup>e</sup> coup

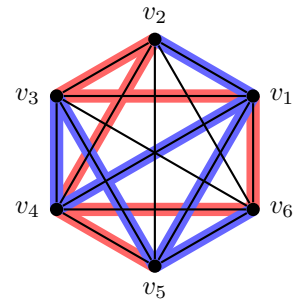
Au 10<sup>e</sup> coup, le graphe bleu est toujours superposable au graphe rouge. Mais au 12<sup>e</sup> coup, Bleu ne peut pas jouer  $v_4v_2$  qui par rotation se superposerait à  $v_3v_1$ , car  $v_4v_2$  est déjà coloriée. Il colorie donc  $v_4v_1$ . Cette arête n'est pas superposable à une arête rouge si celle-ci est permutée, puisque sa permutée  $v_3v_6$  n'est pas rouge.



10<sup>e</sup> coup

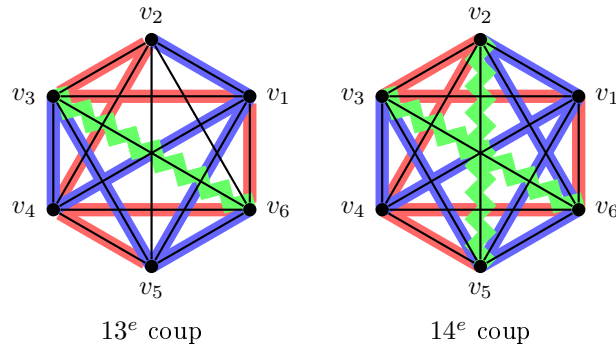


11<sup>e</sup> coup



12<sup>e</sup> coup

Au 13<sup>e</sup> coup, l'arête  $v_3v_6$  ne peut ni être coloriée en bleu, ni en rouge. Elle est donc interdite et coloriée en vert. Rouge ne peut pas non plus jouer  $v_2v_5$  ni  $v_2v_6$ . Il n'a plus de coup à jouer. Rouge passe donc son tour. Au 14<sup>e</sup> coup, Bleu ne peut pas jouer  $v_2v_5$  mais peut jouer  $v_2v_6$ .



Rouge a donc joué 6 coups et Bleu en a joué 7. Ainsi, en copiant le Rouge, Bleu a réussi à bloquer le joueur rouge. Le Bleu a donc été plus intelligent que précédemment et a gagné.

#### Références

- [1] P. Gazzano, N. Lygeros, Analyse stratégique du Jeu de Frank.
- [2] P. Gazzano, N. Lygeros, Analyse stratégique du Jeu de Frank en coopération.