De la stratégie mixte au mix-stratégique en théorie des jeux

P. Gazzano, N. Lygeros

L'axiomatique de von Neumann-Morgenstern-Nash définit un jeu stratégique comme la donnée d'un triplet $(\{1,2\}, X, \leq_1, \leq_2)$ où X est un ensemble de choix et où $\leq_1$ et $\leq_2$ sont des ordres totaux sur X. En 1962, Robert Aumann a ensuite affaibli la relation d'ordre en supposant que l'ordre n'est plus total. Nous nous retrouvons alors non plus avec une chaîne mais avec un ensemble muni d'un ordre partiel sur X. Dans ce cadre plus général, Robert Aumann a montré que l'ensemble des notions et des résultats comme l'existence de l'utilité et de l'équilibre de Nash sont conservés.

Dans cette note, nous nous plaçons alors dans le contexte où chaque joueur possède une relation de préférence partielle sur X $\leq_1$ et $\leq_2$.

Nous posons : $L^1_{x_1,x_2} = \{x_l \in X \,/\, x_1 \vee_1 x_2 \leq_1 x_l\}$ et $L^2_{x_1,x_2} = \{x_l \in X \,/\, x_1 \vee_2 x_2 \leq_2 x_l\}$

Via l'ajout des deux axiomes suivants à l'axiomatique de Nash nous définissons une opération d'hyperstructure $*: X^2 \to P(X)$

-Axiome de synergie : $(x_1, x_2) \in x_1 * x_2$ (cf. Definition of Synergetic Hyperstructures)

-Axiome de coopération : Les joueurs 1 et 2 peuvent se mettent d'accord sur l'existence d'un élément de X tel que : $\mathrm{V}L^1_{x_1,x_2} = \mathrm{V}L^2_{x_1,x_2} = \mathrm{V}L_{x_1,x_2}$ lorsque celui-ci existe.

Nous obtenons alors :

$x_1 * x_2 = (x_2, x_1, \mathrm{V}L_{x_1,x_2})$ si $\mathrm{V}L_{x_1,x_2}$ existe,

$x_1 * x_2 = (x_1, x_2)$ sinon.

Cette opération, nous permet de définir Hv-groupe sur X, car nous avons l'axiome de reproduction et l'associativité faible. Dans le cas où la synergie est absente, nous retombons sur la coopération classique. Par ailleurs, via la commutativité de $\vee_2$ et $\vee_1$, nous avons $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$.

Références

R. Aumann: Utility Theory without the Completeness Axiom. *Econometrica* Vol. 30, No. 3, pp. 445-462, 1962.

N. Lygeros: Definition of Synergetic Hyperstructures. Perfection 16 3 3/2015

J. Nash: Two-Person Cooperative Games, *Econometrica*, Vol. 21, p. 128-140, 1953.

J. von Neumann and O. Morgestern: *Theory of Games and Economic Behavior*, New York, Wiley. 1944