Construction d'un Hypergroupe au sens de Marty via des relations de préférence partielle en théorie des jeux

P. Gazzano, N. Lygeros

Dans cette note, nous nous plaçons dans le cadre où chaque joueur possède une relation de préférence partielle sur X : $\prec_1$ et $\prec_2$. Si $(X, \prec_1)$ et $(X, \prec_2)$ sont des treillis de même base alors $x_1 \vee_1 x_2 = \{x \in X, x_1 \prec_1 x \wedge x_2 \prec_1 x\}$ et $x_1 \vee_2 x_2 = \{x \in X, x_1 \prec_2 x \wedge x_2 \prec_2 x\}$ existent et sont uniques, mais rien n'indique qu'ils sont égaux. Par l'axiome de coopération, on suppose que $x_1 \vee_1 x_2 = x_1 \vee_2 x = x_1 \vee x_2$ peut exister. Evidemment, $x_1 \vee x_2$ définit un équilibre de Nash. Nous posons :

$x_1 * x_2 = \{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\}$ s'il existe et $x_1 * x_2 = \{x_1, x_2\}$ sinon.
Si l'un des $x_1 \vee x_2$, $x_2 \vee x_3$, $x_1 \vee x_3$ n'existe pas, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ ne peut exister.

Calculons :

$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\} * x_3 = \{\{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}, \{x_1 \vee x_2, x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}\}$
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_3, x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$
Or :
$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = \{\{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\}, \{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_1, x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_3, x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

Il nous reste à tester les disjonctions de cas :

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner sur x_1 et $x_2 \vee x_3$, (ou x_3 et $x_1 \vee x_2$, ou x_2 et $x_1 \vee x_3$).
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\} * x_3 = \{\{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}, \{x_3, x_2 \vee x_3, x_3 \vee x_2 \vee x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_3\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\} = \{\{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\}, \{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_1, x_2 \vee x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_3\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner sur x_1 et x_2 mais ils peuvent se coordonner entre x_1 et x_3 et entre x_2 et x_3. Nous avons donc :
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2\} * x_3 = \{\{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_3, x_2 \vee x_3\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_1, x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_3, x_2 \vee x_3\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner sur x_2 et x_3 mais ils peuvent se coordonner entre x_1 et x_3 et entre x_1 et x_3. Nous avons donc :
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2\} * x_3 = \{\{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_3, x_2 \vee x_3\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_3, x_2 \vee x_3\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner sur x_1 et x_3 mais ils peuvent se coordonner entre x_2 et x_3 et entre x_1 et x_2. Nous avons donc :

$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\} * x_3 = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}, \{x_3, x_1 \vee, x_2\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_2 \vee x_3, x_1 \vee, x_2\}$

$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\} = \{\{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\}, \{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_1, x_2 \vee x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_2 \vee x_3, x_1 \vee, x_2\}$

Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner sur x_1 et x_2 ni x_1 et x_3, mais il reste x_2 et x_3. Donc :
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2\} * x_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_3, x_2 \vee x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_2 \vee x_3\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner sur x_1 et x_2 ni x_2 et x_3, mais il reste x_1 et x_3. Donc :
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2\} * x_3 = \{\{x_1, x_3, x_1 \vee x_3\}, \{x_2, x_3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_3\}$
$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * \{x_2, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_3\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner sur x_2 et x_3 ni x_1 et x_3, mais il reste x_1 et x_2. Donc :
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2, x_1 \vee x_2\} * x_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_2\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_2\} = \{x_1, x_2, x_3, x_1 \vee x_2\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

• Si 1 et 2 n'arrivent pas à se coordonner dans aucun des cas. Donc :
$(x_1 * x_2) * x_3 = \{x_1, x_2\} * x_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$
$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * \{x_2, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\}$
Donc $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

Le mix-stratégique donc définit une loi d'hypergroupe au sens de Marty sur X.