Sur un nouvel espace stratégique en théorie des jeux

P. Gazzano, N. Lygeros

Nous nous plaçons dans le cadre de l'axiomatique d'Aumann. Chaque joueur possède donc une relation de préférence partielle sur X : $(X, \preceq_1)$ et $(X, \preceq_2)$. Nous posons : $x_1 \vee_1 x_2 = \{x \in X, x_1 \preceq_1 x \wedge x_2 \preceq_1 x\}$ et $x_1 \vee_2 x_2 = \{x \in X, x_1 \preceq_2 x_1 \wedge x_2 \preceq_2 x\}$. Via l'axiome de coopération, nous supposons que $x_1 \vee_1 x_2 = x_1 \vee_2 x_2 = x_1 \vee_{1,2} x_2$ peut exister.

En plus des deux axiomes définis dans les articles précédents, nous ajoutons les deux axiomes d'Aumann. Ainsi, X est doté d'une opération $+$ telle que

$$\forall z \in X, \forall \lambda > 0, x_1 \succeq_{1,2} x_2 \Longrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)z \succeq_{1,2} \lambda x_2 + (1-\lambda)z$$

$$\forall \lambda, \lambda x + (1-\lambda)y \succ_{1,2} z \Longrightarrow \neg z \succ_{1,2} y$$

L'analyse convexe montre qu'il est possible de plonger X dans un espace vectoriel $(X, +)$ ordonné si l'ordre vérifie les deux axiomes précédents. Nous avons donc $\forall a, \forall b \in X, a + b \in X$. Dans cet espace vectoriel ordonné, nous avons aussi $(a+c) \vee_1 (b+c) = a \vee_1 b + c$. Nous définissons enfin une stratégie mixte sur un collection de stratégies via cette formulation : $x + \{y, z\} = \{x\} + y, z = \{x+y, x+z\}$. Mathématiquement parlant, il s'agit d'une translation d'ensemble.

Si $a \vee_1 b = a \vee_2 b = a \vee_{1,2} b$ alors $a \vee_1 b + c = a \vee_2 b + c = a \vee_{1,2} b + c$ donc $a \vee_{1,2} b + c = (a+c) \vee_{1,2} (b+c)$. Nous en déduisons que si $a \vee_{1,2} b$ existe, alors il existera pour $\forall c$: $(a+c) \vee_{1,2} (b+c)$. En théorie des jeux, nous pouvons interpréter ce résultat de la façon suivante : si 1 et 2 s'accordent sur un équilibre entre a et b, ils s'accorderont alors s'ils jouent respectivement la stratégie mixte $a+c$ et $b+c$. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'une translation d'équilibre qui a été obtenue par un transfert de structure.

Nous posons alors $(X, *, +)$ avec $(X, *)$ hypergroupe au sens de Marty et $(X, +)$ semi-groupe. Si 1 et 2 arrivent à s'accorder sur b et c :

$$a + (b * c) = a + \{b, c, b \vee_{1,2} c\} = a + b, a + c, a + b \vee_{1,2} c = \{a+b, a+c, (a+b) \vee_{1,2} (a+c)\}$$
$$(a+b) * (a+c) = \{a+b, (a+b) \vee_{1,2} (a+c), a+c\}$$

et s'il n'y arrivent pas alors $b \vee_{1,2} c$ et $(a+c) \vee_{1,2} (b+c)$ n'existent pas

$$a + (b * c) = a + \{b, c\} = \{a+b, a+c\} = \{a+b, a+c\}$$
$$(a+b) * (a+c) = \{a+b, a+c\}$$

Ainsi $a + (b * c) = a + b, c = (a+b) * (a+c)$
Cela signifie en d'autres termes que l'espace de stratégie $(X, *, +)$ est un hyperanneau additif.