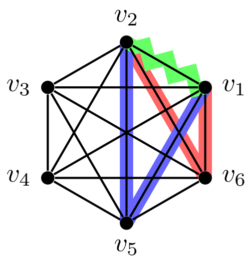
Jeu de Frank et Dénombrement de parcours avec interdiction

P. Gazzano, N. Lygeros

Nous appelons configuration finale la donnée d'une arête interdite et pour chacun des joueurs, un triangle dont l'une des arêtes est l'arête interdite. Cette configuration finale permet de représenter la fin possible d'une partie dans le Jeu de Frank. Prenons v_1v_2 l'arête interdite, pour le triangle rouge (Joueur 1) prenons $\{v_2v_6, v_1v_6, v_1v_2\}$ et le triangle bleu (Joueur 2) prenons $\{v_1v_5, v_2v_5, v_1v_2\}$. Nous appelons parcours de 1 (Respectivement 2) toute suite $(e^1_j)_{j=1...7} \in E(K_6)$ avec $e^1_6 = v_1v_6, e^1_7 = v_2v_6$ et $v_1v_2 \notin (e^1_j)_{j=1..7}$ (Respectivement $e^2_6 = v_1v_5, e^2_7 = v_2v_5$ et $v_1v_2 \notin (e^2_j)_{j=1...7}$). Une partie complète est donc la suite de graphes formée par $(e^1_1, e^2_1, ..., e^1_i, e^2_i)_{i=1...7}$ à condition que $(e^1_j)_{j=1...7} \cap (e^2_j)_{j=1...7} = \emptyset$. La configuration terminale prise en exemple correspond au graphe suivant :



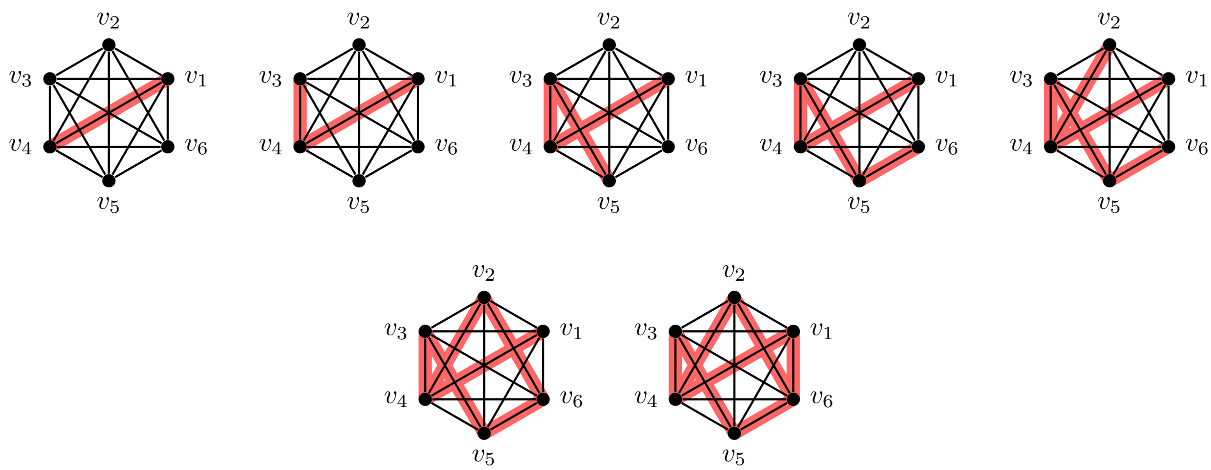
L'objectif de cette Note est de dénombrer le nombre de parcours qui aboutissent à une configuration terminale donnée.

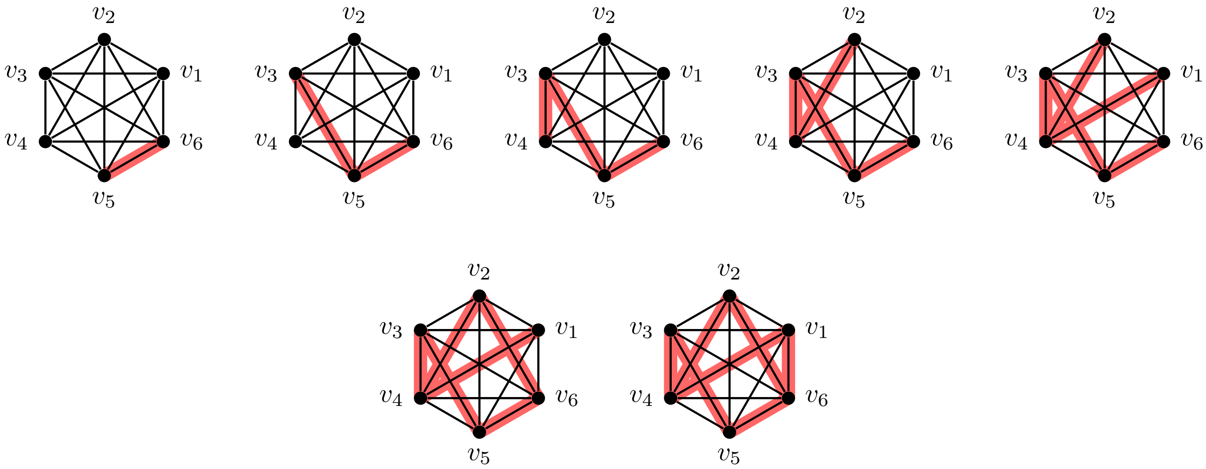
Nous disons que deux parcours de 1 sont isomorphes si et seulement si $\forall i = 1...7, e^1_1, ..., e^1_i \sim e'^1_1, ...e'^1_i$, c'est-à-dire si les matrices d'adjacence $Adj(G(e^1_1, ..., e^1_i))$ et $Adj(G(e'^1_1, ...e'^1_i))$ sont isomorphes.

Voici des exemples de deux parcours isomorphes, ainsi que leurs graphes respectifs :

— $\{1, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{1, 6\}$

— $\{5, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{1, 6\}$





A l'aide du logiciel Maple, étant donné la configuration terminale prise en exemple, nous avons dénombré 480 parcours, 12 parcours non-isomorphes pour une arête interdite et 29399 jeux possibles. Comme nous pouvons placer 15 arêtes interdites et 12 couples de triangles, nous avons 15*12*480 parcours. Voici les 12 parcours non-isomorphes :

— 1) $[\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 2) $[\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{5,6\},\{4,5\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 3) $[\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\},\{3,4\},\{5,6\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 4) $[\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\},\{4,6\},\{3,5\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 5) $[\{1,3\},\{2,3\},\{4,6\},\{3,5\},\{4,5\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 6) $[\{1,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{2,3\},\{5,6\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 7) $[\{1,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{2,3\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 8) $[\{1,3\},\{4,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{5,6\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 9) $[\{1,3\},\{4,5\},\{2,3\},\{4,6\},\{3,5\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 10)$[\{1,3\},\{4,5\},\{3,4\},\{2,3\},\{5,6\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 11)$[\{1,3\},\{4,5\},\{3,4\},\{5,6\},\{2,3\},\{2,6\},\{1,6\}]$
— 12)$[\{1,3\},\{4,5\},\{4,6\},\{3,5\},\{2,3\},\{2,6\},\{1,6\}]$