Sur une généralisation géométrique du mix-stratégique

P. Gazzano, N. Lygeros

Dans un précédent article, nous avions défini le mix-stratégique par la loi d'hyperstructure, au sens de la généralisation de la notion d'hypergroupe de Marty:

$$\forall (x^1, x^2) \in L^2, x^1 * x^2 = \begin{cases} \left\{x^1, x^2, x^1 \vee x^2\right\} \text{ si } x^1 \vee x^2 := x^1 \vee_1 x^2 = x^1 \vee_2 x^2 \\ \left\{x^1, x^2\right\} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

où le champ des joueurs est un treillis L et le champ d'action des joueurs 1 et 2 est respectivement $(L, \leq_1)$ et $(L, \leq_2)$.

Dans cette note, nous généralisons cette loi d'hyperstructure par la suivante:

$$\forall (x^1, x^2) \in L^2, x^1 * x^2 = \begin{cases} \left\{u : x^1 \wedge x^2 \leq u \leq x^1 \vee x^2\right\} \text{ si } x^1 \vee x^2 := x^1 \vee_1 x^2 = x^1 \vee_2 x^2, x^1 \wedge x^2 := x^1 \wedge_1 x^2 = x^1 \wedge_2 x^2 \\ \left\{x^1, x^2\right\} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

D'un point de vue purement économique, il est clair que la première loi est suffisante, car dans ce cadre restreint, les joueurs cherchent simplement à maximiser leur action sans rien envisager de plus.

Cependant d'un point de vue stratégique, la seconde loi est bien plus intéressante car elle permet de créer un véritable objet mathématique : le segment, c'est-à-dire un espace connexe et convexe. Cette loi * permet de représenter l'ensemble des possibles auxquels 1 et 2 accèdent lorsqu'ils agissent en coopération, c'est-à-dire l'intervalle compris entre le pire des cas $x^1 \wedge x^2$, et le meilleur cas : $x^1 \vee x^2$. De cette manière, nous avons une approche plus complète.

Ainsi nous retrouvons sur la loi définie dans le chapitre « Lattice » du livre « *Applications of Hyperstructure theory* » qui permet de rentrer dans le domaine de l'apprentissage renforcé des machines. En d'autres termes, d'avoir un outil mathématique puissant pour gérer l'apprentissage d'un réseau neuronal profond.

Enfin, nous avons démontré le schéma mental suivant. Si la non-coopération au sens de Nash est une loi de groupe, puisque si S est l'ensemble des stratégies d'un joueur, la stratégie mixte est une loi + telle que : $s_1 + s_2 \in S$, alors la coopération est une loi d'hypergroupe.