Εισήγηση του Καθηγητή Νίκου Λυγερού με θέμα:

"Μαθηματικά δομικά στοιχεία των θεμελίων της Γενικής Σχετικότητας"

στο 13ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Φυσικών

που διοργανώνεται στο

Συνεδριακό Κέντρο Πανεπιστήμιου Πατρών

20/03/2010

Ν. Λυγερός

Φαντάζομαι ότι το χρονόμετρο αρχίζει από τώρα και φαντάζομαι ότι είναι Νευτωνικό. Θα ήθελα απλώς να προειδοποιήσω το ακροατήριο και να πω ότι θα μιλήσω για μαθηματικά, άρα όσοι θέλουν να βγουν να βγουν τώρα, γιατί μετά από μισή ώρα θα είναι πιο δύσκολα τα πράγματα στη ζωή τους.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Κόκωτα, που σας έδειξε αυτά που δεν μπορούσα να σας δείξω και μ' έναν πολύ όμορφο τρόπο. Άρα θα το κάνουμε Dr Jekyll και Mr. Hyde. Είχατε τον Dr Jekyll, θα κάνω το άλλο μέρος, το πιο άσκημο, αυτό που αφορά αυτά που δεν κοιτάζουμε, αυτά που δεν βλέπουμε, τα Μαθηματικά. Θα ήθελα να αφιερώσω κι αυτή την διάλεξη στον φίλο μου τον Ιωάννη Γραμματικάκη, ο οποίος ως πειραματικός πάντοτε μου ασκεί πίεση, γιατί βρίσκει μαθηματικό που μπορεί να αντέξει αυτήν την πίεση.

Θα ήθελα να μιλήσω λοιπόν για μερικά δομικά στοιχεία. Αν θέλετε να έχετε μια εικόνα, η θεωρία της Σχετικότητας είναι μία τεράστια πολυκατοικία και κατά τη διάρκεια της διάλεξης θα μιλήσουμε μόνο για τα θεμέλια. Δηλαδή αυτά που δεν φαίνονται. Αλλά ξέρετε, όταν θέλετε να κάνετε μια μεγάλη πολυκατοικία, άμα δεν βάλετε θεμέλια που είναι κι αυτά μεγάλα, τότε δεν ανεβαίνετε ψηλά. Θα σας φανεί λίγο παράξενο ότι για να ανεβούμε ψηλά πρέπει πρώτα να σκάψουμε. Εμείς είμαστε σ' αυτόν τον τομέα. Σκάβουμε. Το πρώτο σκάψιμο, το πρώτο φτυάρι είναι για να μην θάψουμε τον Albert Einstein. Αλλά να θυμάστε πάντοτε τη φράση του : «Έκαναν ότι μπορούσαν για να με θάψουν, αλλά ξέχασαν ότι είμαι σπόρος».

Η ιδέα είναι ότι ένα από τα πρώτα προβλήματα που έχουμε είναι ότι είμαστε σε πολλές διαστάσεις και όχι σε δύο. Θα το εξετάσουμε προς το τέλος της διάλεξης, όταν θα κοιτάξουμε και την προσέγγιση του John Nash. Αρχικά ένα στοιχείο που μας ενοχλεί –εντός εισαγωγικών-, γιατί βέβαια όλα αυτά τα εμπόδια που μας ενοχλούν αρχικά, μας επιτρέπουν να κάνουμε μια υπέρβαση και μετά να καταλάβουμε καλύτερα τι γίνεται.

Όταν κοιτάζετε το ημίτονο και το συνημίτονο, σας φαίνονται εντελώς το ίδιο πράγμα. Συμπληρωματικά, λέμε διάφορες λέξεις τέτοιου τύπου, αλλά στην πραγματικότητα υπάρχει μια μεγάλη διαφορά. Εγώ όπως τη νιώθω ως θεωρητικός, είναι ότι το συνημίτονο θα μου δώσει το εσωτερικό γινόμενο και μάλλον θα το ορίσω από αυτό, ενώ το ημίτονο είναι το εξωτερικό γινόμενο. Αυτή η μικρή διαφορά προκαλεί ήδη μια ασυμμετρία. Ποια είναι η ασυμμετρία: Είναι ότι το ένα παράγει ένα βαθμωτό, ενώ το άλλο παράγει ένα διάνυσμα. Άμα εξηγήσετε αυτή τη μικρή διαφορά, θα δείτε ότι όπως είναι διάνυσμα σας δίνει μια κατεύθυνση. Άρα άμα το κάνω με έναν τρόπο θα ανεβώ, αν το κάνω με άλλον θα κατεβώ. Ενώ στο άλλο θα είμαι πάντοτε σε μια επιφάνεια. Αυτή η διαφοροποίηση είναι η μόνη εξήγηση, που εξηγεί από μόνη της γιατί, ας πούμε στη Θεωρία Ομάδων, όταν παίρνουμε Quaternions είναι μη αντιμεταθετικό. Διότι ο πυρήνας, το κέντρο, είναι στην πραγματικότητα σαν να χρησιμοποιεί μόνο και μόνο αυτήν την ιδέα, ότι μπορώ να μεταφράσω τα Quaternions και να τα μεταφέρω ξανά σ' ένα πιο απλό σύστημα, όπου έρχεται το εξωτερικό γινόμενο και ξαφνικά όπως έχεις ένα (+) και ένα (-), αυτό θα μου αλλάξει τα γεγονότα. Όταν θα κάνω AxB ή BxA θα έχω μια διαφοροποίηση.

Αυτό είναι ένα πρώτο πράγμα που εμφανίζεται στη Θεωρία της Σχετικότητας σαν πολύ βαθύ θεμελιακό σύστημα. Ένα άλλο πράγμα που εμφανίζεται είναι όταν ακούμε συνεχώς –και το ρωτάμε και με τα παιδιά – ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o. Με αυτό βέβαια πάντοτε υπονοούμε ότι είμαστε στη θεωρία την Ευκλείδεια. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι τόσο απλοϊκή όσο νομίζουμε. Είναι μία καλή βάση. Ο ίδιος ο Albert Einstein έλεγε ότι είναι καλό να αρχίσουμε με τα στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έτσι ώστε να προχωρήσουμε, γιατί νοητικά παρέχει μερικά σχήματα, που είναι πολύ σημαντικά και πιο μετά.

Ξέρετε ότι υπήρχε μετά το αξίωμα με την παράλληλο. Όταν έχουμε μια ευθεία και παίρνουμε ένα σημείο και προσπαθούμε να μάθουμε αν είναι μία μοναδική ευθεία, που είναι παράλληλη προς την πρώτη. Η διαφοροποίηση έγινε πώς; Προσπαθούσαμε μαθηματικά να πούμε ότι αυτό το αξίωμα δεν είναι αξίωμα, αλλά λήμμα, ή ακόμα και θεώρημα, αν το είχαμε πετύχει. Στην πραγματικότητα μετά ανακαλύψαμε ότι δεν ισχύει. Ή μάλλον ότι ισχύει μόνο και μόνο στον Ευκλείδειο χώρο. Και όταν δεν ισχύει, δηλαδή όταν δεν υπάρχει παράλληλη, τότε είμαστε σ' ένα χώρο που ονομάζουμε Ρημανικό. Αν είναι άπειρες οι λύσεις τότε είμαστε σ' ένα χώρο που είναι του Lobachevsky.

Αυτή η διαφορά, αν θέλετε να τη δείτε πρακτικά για να μη χαθούμε με τα ονόματα – γιατί είναι μεγάλα ονόματα και ο Γερμανός και ο Ρώσος μαθηματικός – κάθε φορά που έχετε απέναντί σας ένα πορτοκάλι, όταν το κόβετε τρεις φορές, αν αυτές οι φορές είναι ορθογώνιες όλες, παράγετε στην πραγματικότητα 8 τρίγωνα που είναι ακριβώς τα ίδια, τα οποία όμως έχουν ως άθροισμα στις γωνίες τους 270^o.

Μερικές φορές, όταν μιλάμε για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, έχουμε την εντύπωση ότι όλα αυτά που λέει είναι ακατανόητα. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιεί πολλά πράγματα τα οποία τα κοιτάζουμε αλλά δεν τα βλέπουμε. Αλλά αυτά υπάρχουν. Ένα άλλο παράδειγμα σ' αυτόν τον τομέα είναι όταν παίρνετε μία σέλα αλόγου (το περίφημα παράδειγμα). Αν ζωγραφίσετε ένα τρίγωνο πάνω σ' αυτή τη σέλα, όταν είσαστε κοντά στην καμπυλότητα, θα βρείτε ένα τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο από 180^o. Και τώρα σας παράγει τρεις κόσμους. Σε σχέση μ' αυτό που έλεγε ο καθηγητής Κόκωτας πριν, θα δείτε ότι μπορούμε να παίξουμε και με τη σταθερά. Αν είναι προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση, ή ακριβώς στο κέντρο, θα επιλέξουμε έναν από τους τρεις κόσμους όσον αφορά τη γεωμετρία. Και με αυτόν τον τρόπο θα μπορούμε να εξηγήσουμε άλλα πράγματα ή βέβαια να τα βάλουμε ad hoc. Αυτό θα το δείξει η επιστήμη. Αυτό αφορά τη γεωμετρία.

Ένα άλλο πρόβλημα που έχουμε και το βλέπετε ήδη στο μαγνητικό πεδίο, είναι ότι μας ενδιαφέρει η γραμμικότητα, μας ενδιαφέρει το επίπεδο σύστημα. Άρα έχουμε πρόσβαση σ' ένα εργαλείο που είναι πολύ απλό. Είναι το διάνυσμα. Το διάνυσμα θα παράγει διανυσματικό χώρο. Αυτό μπορούμε να το εξηγήσουμε. Στην αρχή είναι λίγο πολύπλοκο, αλλά σιγά – σιγά καταλαβαίνουμε ότι όλα παν καλά. Στην πραγματικότητα όταν κάναμε μερικά πειράματα σε απλή Φυσική, σε τοπικό επίπεδο. Βλέπουμε ότι το μαγνητικό πεδίο δεν είναι διάνυσμα, αλλά χρησιμοποιεί αναγκαστικά έναν τανυστή. Διότι το περίφημο πείραμα με το κάθένα, έναν κύκλο, γύρω – γύρω δημιουργεί ένα πεδίο μαγνητικό, το οποίο είναι εφαπτόμενο. Αυτό πολύ συχνά δυστυχώς στο Λύκειο, σας εξηγούν ακόμα ότι είναι διάνυσμα. Ενώ θα έπρεπε, πολύ ορθολογικά να σκεφτούν, ότι άμα πάρω το διάνυσμα και είναι από δω και κάνω μια περιστροφή 180^o, θα βρεθεί από την άλλη το μαγνητικό πεδίο. Και το μόνο διάνυσμα που είναι αντίθετο με τον εαυτό του είναι μόνο το 0. Δηλαδή αν δεχτείτε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι διάνυσμα, τότε έχετε αποδείξει ότι οποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο έχει ένταση μηδέν! Άμα δεν θέλετε να έχει ένταση μηδέν, θα πρέπει να αποδεχτείτε ότι η έννοια του διανύσματος δεν επαρκεί

Είναι ένας απλός τρόπος για να δούμε ότι δεν μπορούμε να τα κάνουμε όλα με διανύσματα. Χρειαζόμαστε και ένα εργαλείο που είναι λίγο πιο δύσκολο και είναι ο τανυστής. Ο τανυστής δεν είναι τόσο δύσκολος όσο φαντάζεστε. Και αν το κάναμε στο Λύκειο θα ήμασταν μάλλον καλύτερα προετοιμασμένοι. Όπως το διάνυσμα είναι μία γενίκευση του αριθμού, ο τανυστής είναι μία γενίκευση του διανύσματος. Όπως το είπε πολύ καλά ο προηγούμενος ομιλητής «μην κοιτάτε τον πίνακα». Η Θεωρία Πινάκων είναι μια θεωρία πολύ πιο βαριά από τη θεωρία τανυστών, γιατί μέσα σ' έναν πίνακα μπορούμε να βάλουμε πολλά πράγματα.

Αυτή η θεωρία θα δημιουργηθεί βέβαια με τον Levi Civita το 1896. Υπάρχουν όμως πρόωρα συστήματα. Θα το δούμε μετά όταν θα μιλήσουμε για τα σύμβολα του Christoffel, που είναι το 1869. Αυτό που έχει όμως σημασία για μας στη Θεωρία της Σχετικότητας τουλάχιστον για σήμερα, είναι ότι αυτά είναι πολύ κοντά από τη δημιουργία της Σχετικότητας. Δηλαδή είναι σπάνια τα δεδομένα μεταξύ Μαθηματικών, εννοώ πραγματικά καθαρά Μαθηματικά και θεωρητικής Φυσικής να είναι τόσο κοντά. Το είπες πολύ σωστά Γιάννη σε κάποια φάση, ότι οι πραγματικοί φυσικοί, αυτοί που είναι οραματιστές, είναι τόσο πολύ στην άκρη, που δεν έχουν πια λέξεις για να πουν για ποιο πράγμα μιλούν. Όλοι οι άλλοι που είναι πίσω, ξέρουν για ποιο πράγμα μιλούν. Είναι πιο έξυπνοι απ' αυτούς! Ξέρουμε ότι μιλούν γι' ¨αυτό¨!

Αυτός όμως που μιλάει γι' ¨αυτό¨ μπροστά από αυτούς που υπάρχουν, δεν ξέρει πώς να το εκφράσει! Και πολύ συχνά πρέπει να κοιτάξει λίγο πιο κάτω, για να δει αν υπάρχει κανένας εργάτης, τύπου μαθηματικός, κι αν έχει φτιάξει κανένα εργαλείο που μπορεί να πάει πιο πέρα.

Αυτή η ιδέα είναι σημαντική, γιατί πρέπει να καταλάβετε ότι όταν ο Albert Einstein κάνει την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, στην πραγματικότητα παράγει μία σύνθεση θα λέγαμε. Δηλαδή από τη μία μεριά έχει τον James Maxwell που λέει ότι τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα μπορούν να καταγραφούν και να τα ξέρω πολύ καλά, από την άλλη έχει τον Isaac Newton, όπου χρησιμοποιεί πολύ καλά τη μηχανική. Μόλις προσπαθεί να βάλει και τα δύο, - ένα πολύ απλό παράδειγμα που το λέμε πολύ συχνά εμείς στους φοιτητές – είναι το λεγόμενο αυτοκίνητο που ανάβετε τα φώτα. Άμα προθέτετε τις δυνάμεις, έχετε ένα πρόβλημα, διότι βλέπετε ότι η σταθερά της ταχύτητας του φωτός δεν αλλάζει καθόλου, ανεξάρτητα με την ταχύτητα του αυτοκινήτου. Αυτό θέλει να πει ότι το άθροισμα των διανυσμάτων – θυμάστε ότι έχουμε ήδη αποφύγει λίγο τα διανύσματα διότι θα περάσουμε στους τανυστές – αλλά ήδη ακόμα και το άθροισμα έχει προβλήματα, γιατί δεν αθροίζεται γραμμικά, όπως είναι σ' ένα διανυσματικό χώρο. Θα πρέπει να βάλουμε κι έναν συντελεστή, για να το πούμε απλά, που θα είναι ένας συντελεστής του τύπου Hendrik Lorentz.

Ο Hendrik Lorentz το είχε βρει προηγουμένως. Η ενοποίηση λοιπόν θα γίνει από τον Albert Einstein με έναν σχετικά απλό τρόπο. Είναι το παράδειγμα, θα έλεγα, του κύκλου και του τετραγώνου, με την εξής έννοια: Άμα σας πω, πείτε μου ένα αντικείμενο που να είναι και κύκλος και τετράγωνο, είναι δύσκολο να το σκεφτείτε. Διότι σκέφτεστε σε δύο διαστάσεις. Αν σκεφτείτε όμως σε τρεις διαστάσεις, αμέσως αντιλαμβάνεστε ότι ο κύλινδρος, ως προβολή, μπορεί να είναι και ένας κύκλος και ένα τετράγωνο. Άρα βλέπετε ότι η λύση είναι λίγο πιο πάνω. Αυτό που θα κάνει ο Einstein με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, είναι ότι θα εντάξει το χρόνο σ' ένα ενιαίο πλαίσιο. Στην πραγματικότητα δεν το κάνει ακριβώς αυτός, αλλά αυτή ήταν η ιδέα του. Θα το κάνει μετά ο Hermann Minkowski. Γι αυτό θα το ονομάσουμε χωροχρόνο του Minkowski. Όπου θα πάρουμε έναν χώρο – χρόνο. Θα έχουμε έναν χώρο με τρεις διαστάσεις, έναν χρόνο με μία διάσταση, αλλά αυτό δεν θα το ονομάζουμε πια 3 και 1, το ονομάζουμε 4, με μια υπογραφή 3+, 1-. Όλη αυτή η ιδέα είναι ότι δημιουργούμε ένα νέο χώρο, όπου εκεί μπορεί να υπάρξει μια ενοποίηση. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε ήδη καταργήσει τον Ευκλείδειο χώρο. Είμαστε σ' έναν ψευδο – Ευκλείδειο. Στην πραγματικότητα είμαστε ήδη σ' έναν επίπεδο θα έλεγα, εντός εισαγωγικών αν το επιτρέπετε, Ρημανικό χώρο. Αυτό θέλει να πει ότι βέβαια – όπως το λέγαμε και για τα τρίγωνα – έχουν ήδη αλλάξει, θα χρησιμοποιήσουμε υπερβολοειδή συστήματα, που θα μας επιτρέπουν να κάνουμε σωστά τους υπολογισμούς.

Η διαφορά είναι ότι προς το παρόν δεν ασχολούμαστε με βαρύτητα. Όταν θα ασχοληθούμε με βαρύτητα, αναγκαστικά θα πρέπει να βάλουμε τον τανυστικό λογισμό. Αλλά τι γίνεται: Είμαστε γύρω στο 1905. Μετά το 1905, το 1907 ο Albert Einstein σκέφτεται ήδη πώς να γενικεύσει την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά τη βαρύτητα. Και προσπαθεί για κάμποσα χρόνια να βρει το εργαλείο που θα του επιτρέψει να κάνει τι; Ένα πράγμα που είναι πολύ σημαντικό και στα Μαθηματικά και στη Φυσική! Τα αναλλοίωτα. Είναι πολύ βασική έννοια. Είναι μία έννοια της συμμετρίας. Είναι ότι μπορώ να κάνω έναν μετασχηματισμό και αυτό που έχω βρει, εφόσον μετασχηματισθεί, θα είναι της ίδιας μορφής.

Άρα δεν μιλάμε ακόμα για πράγματα τύπου ¨σύμμορφες απεικονίσεις¨, αλλά αυτή είναι η ιδέα που έρχεται. Η ιδέα είναι ότι θέλω να κάνω σ' ένα εργαστήρι μερικά πειράματα και να είναι του ίδιου τύπου σ' ένα άλλο εργαστήρι. Άρα ο μετασχηματισμός δεν είναι πια του τύπου Γαλιλαίου, ούτε του τύπου Lorentz, πρέπει να είναι λίγο πιο δύσκολος, γιατί αυτή τη φορά μπαίνει και το βαρυτικό πεδίο. Αυτό σημαίνει ότι ο Albert Einstein εκείνη τη στιγμή ξέρει ότι αυτά που έχει δεν επαρκούν, αλλά δεν ξέρει ακόμα ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει τον τανυστικό λογισμό, διότι πολύ απλά δεν τον γνωρίζει καθόλου. Μιλάει λοιπόν με τον συμφοιτητή και συνάδελφο και αδελφικό φίλο θα έλεγα, τον Marcel Grossmann. Είναι ο Marcel Grossmann που θα του μάθει τον τανυστικό λογισμό και μάλιστα θα υπάρχει και άρθρο που θα δημοσιεύσουν μαζί, όπου θα εξηγήσουν μία πρώτη προσέγγιση από αυτό που θα ονομάζαμε Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Όπως το είπε πολύ σωστά ο καθηγητής Κόκωτας, είναι το περιήλιο, αυτό που το ερμηνεύει στην πραγματικότητα πριν τελειώσει εντελώς η ολοκλήρωση της θεωρίας της Σχετικότητας της Γενικής. Δεν έχετε ανάγκη από όλον τον φορμαλισμό για να προβλέψετε αυτό το πράγμα.

Όταν όμως θα πάτε πιο βαθειά, υπάρχουν μερικές ανάγκες που θα εμφανισθούν. Δεν θα τα καταφέρουν αμέσως. Και παράλληλα έχουμε κι έναν άλλον ερευνητή, τον David Hilbert, ο οποίος θα βρει κι αυτός την εξίσωση πεδίου. Θα λέγαμε ότι έχουμε δύο προσεγγίσεις που είναι ανεξάρτητες. Μπορεί να ήταν πιο σωστό να ονομάζουμε αυτές τις εξισώσεις πεδίου Hilbert - Einstein ή Einstein – Hilbert, δεν έχει σημασία. Αλλά είναι δύο προσεγγίσεις διαφορετικές. Ο Albert Einstein λειτούργησε λίγο πιο διαισθητικά και είχε αυτήν την ανάγκη γιατί δεν είχε το εργαλείο. Ο David Hilbert γνωρίζει καλά το εργαλείο του τανυστικού υπολογισμού. Όταν διαβάζει τελικά κείμενα του Albert Einstein που αφορούν σ' αυτό το πρόβλημα, θα μπει πιο γρήγορα σ' αυτό το πλαίσιο και στην πραγματικότητα θα βρει και αυτός αυτήν την εξίσωση και θα κάνει μια μικρή διόρθωση, κάτι σε σχέση με αυτά που είχε βρει ο Albert Einstein.

Εδώ λοιπόν είμαστε σ' ένα πλαίσιο γενικό, όπου υπάρχει αυτή η εξίσωση –μιλάμε για το κενό. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τανυστή Riemann - Ricci. Αν θυμάστε καλά, είχατε μια εξίσωση προηγουμένως στο δεξί μέρος, αυτό που λέμε εμείς ότι είναι το πιο ωραίο. Εκτός βέβαια από τη σταθερά τη Λ, που μας ενοχλεί κάποτε, γι αυτό μερικές φορές τη σβήνουμε, δεν τη βάζουμε, κάνουμε διάφορα. Θυμάστε ότι ο ίδιος ο Albert Einstein έλεγε ότι ήταν το μεγαλύτερο λάθος της ζωής του. Τώρα τελικά λεν ότι μπορεί να ήταν μια πολύ καλή ιδέα, με τα νέα δεδομένα. Και από την άλλη πλευρά έχετε τον τανυστή ορμής – ενέργειας.

Όταν είσαστε λοιπόν σ' αυτό το πλαίσιο, μπορείτε να πείτε ότι έχετε θεμελιώσει τη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας. Στέκει από μόνη της. Αλλά μετά θα μπούμε στα προβλήματα. Για να τα λύσουμε θα χρησιμοποιήσουμε – αυτό χρησιμοποίησε ο Albert Einstein – ένα φορμαλισμό που είναι γνωστός. Είναι παλιός. Είναι ο φορμαλισμός του Euler – Lagrange. Εδώ υπάρχουν μερικά προβλήματα που έχει να λύσει. Και τώρα έρχεται ένας Έλληνας μαθηματικός που θα τον βοηθήσει, που είναι ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή. Θα έρθουν σε επαφή για πρώτη φορά μαζί το 1916 και θα μελετήσουν μερικά προβλήματα. Στην πραγματικότητα ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή θα του μάθει κάτι που είναι σχετικά απλό για τους μαθηματικούς εκείνη την εποχή ήδη. Και είναι ο φορμαλισμός Hamilton – Jacobi. Δεν τον ήξερε ο Albert Einstein. Θα του επιτρέψει να λύσει πιο εύκολα μερικά προβλήματα που είχε. Και έτσι θα υπάρξει μια συνεργασία. Αλλά προσέξτε, δεν υπάρχει βέβαια κοινή δημοσίευση. Θεωρεί ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή - ο οποίος παρεμπιπτόντως ήταν και μαθητής του David Hilbert, άρα είχαν την ίδια αξιωματική προσέγγιση – ότι παίρνουμε αξιώματα, βρίσκουμε λήμματα, μετά θεωρήματα και το κάνουμε με έναν τρόπο πολύ συστηματικό. Ενώ ο Albert Einstein το έκανε όπως μπορούσε, όπως του ερχόταν τα δεδομένα. Όπως το κάνετε πολύ πιο συχνά στη Φυσική. Γι αυτούς, που ονομάζω πραγματικούς φυσικούς, που έχουν αυτή τη μύτη, που τους λέει θα πας λίγο από δω και όχι από εκεί. Μετά ερχόμαστε ως μαθηματικοί να το επιβεβαιώσουμε αυτό. Άρα ένας τρόπος για να το δείτε είναι όταν ο Albert Einstein μίλησε για μερικές λύσεις που είχε βρει διαισθητικά, μετά υπήρχε ένας φορμαλισμός που μελετήθηκε από τον Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή και είπε ότι οι άλλες λύσεις που δεν μελέτησε ο Albert Einstein είναι εξωτικές και μπορούμε να τις απορρίψουμε για την πραγματικότητα της Φυσικής. Κατά συνέπεια επιβεβαίωσε αυτό το θέμα.

Τώρα, όταν έχουμε αυτή τη Γενική εξίσωση και έχουμε λύσει μερικά προβλήματα, θα μπορούσαμε να πούμε: γιατί αυτή η εξίσωση; Προηγουμένως είδατε πολύ ωραίες εφαρμογές για την επίλυση αυτής της εξίσωσης. Είδατε μάλιστα και ένα ανάπτυγμα. Αλλά προσέξτε όταν κάνετε αναπτύγματα. Αυτά τα κάνουμε όταν είναι ασθενές το πεδίο. Γιατί όταν είναι ισχυρό πεδίο, έχουμε μερικά προβλήματα γιατί δεν υπάρχει πια γραμμικό πλαίσιο για να πούμε ότι πάνω – κάτω σε τοπικό επίπεδο, είναι του ίδιου τύπου. Άρα το Νευτωνικό σύστημα είναι καλό όταν είναι ασθενές και σας υπενθυμίζω ότι τα διαστημόπλοια που πηγαίνουν στη σελήνη, στην πραγματικότητα χρησιμοποιούν απλώς Νευτωνική μηχανική. Άρα να μη ξεχνιόμαστε, να μη νομίζουμε ότι τα έχουμε απορρίψει όλα. Απλώς έχουν ενσωματωθεί μέσα στον κοινό κορμό της θεωρίας της Σχετικότητας. Και λέμε απλώς ότι όταν οι ταχύτητες είναι μικρές σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είμαστε στο ίδιο πλαίσιο. Αν θέλετε να το δείτε λίγο πιο μαθηματικά, όταν έχετε ας πούμε τον τύπο $\gamma\ m\ c^2$, όταν θα κάνετε ένα ανάπτυγμα θα ξαναβρεθείτε, βέβαια τοπικά, στην κινητική ενέργεια που γνωρίζετε, όταν θα κοιτάξετε το δεύτερο σκέλος. Το πρόβλημα είναι ότι όταν ξέρετε ήδη τη Θεωρία της Γενικής Σχετικότητας και της Ειδικής Σχετικότητας, είναι πολύ εύκολο να ξανακατεβείτε στη Νευτώνια. Για τον Albert Einstein το πρόβλημα ήταν, πώς ανεβαίνεις! Είναι αυτό που ονομάζουμε και στην επιστημολογία «απαγωγή». Δεν είναι καν επαγωγή. Είναι ότι από ένα μόνο πράγμα πρέπει να ανεβείτε μια ιδέα. Αλλά η μεγάλη ιδέα για την Ειδική Σχετικότητα ήταν ότι η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή και παραμένει σταθερή σε οποιοδήποτε σύστημα. Αυτό θέλει να πει ότι θα ξαναϋπολογίσουμε όλους τους μετασχηματισμούς σε σχέση με αυτήν την ιδέα. Στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας θα έχουμε την ισοδυναμία αδρανειακής μάζας.

Δεν θα μπούμε σ' αυτό το θέμα, αλλά αυτή η ισοδυναμία είναι πολύ σημαντική για να καταλάβετε πώς θα λειτουργήσει η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Άρα παραμένει το ερώτημα: γιατί αυτή η εξίσωση μόνο; Εδώ θα μπούμε σ' ένα άλλο πλαίσιο, μπορεί να είναι λίγο πιο πρόσφατο. Το 2007 ο John Nash είχε μια άλλη προσέγγιση του προβλήματος. Ξέρετε ότι υπάρχει ένα πρόγραμμα όπου ο Infeld και ο Hofmann με τον Einstein, προσπάθησαν να γενικεύσουν τη θεωρία της σχετικότητας, για να ενσωματώσουν τον ηλεκτρομαγνητισμό μέσα στο δικό της πλαίσιο. Είναι ένα πρόβλημα που έχουμε ακόμα και τώρα. Σας εξηγήθηκε προηγουμένως, άρα δεν θα μπω σε λεπτομέρειες. Αυτό το πρόγραμμα έχει κάποια έννοια γιατί πηγαίνει προς την ενοποίηση. Αλλά ο John Nash ήρθε από μία άλλη κατεύθυνση. Πρώτα από όλα ξέρετε ότι ο John Nash είναι πιο ειδικός στη θεωρία παιγνίων, αυτό θυμόμαστε. Αλλά έχει ασχοληθεί και με πολλά προβλήματα του τύπου Riemann. Ένα από αυτά που τον απασχόλησε έχει εφαρμογή και στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Η ιδέα του τώρα είναι, αντί να προσπαθούμε να εξηγήσουμε από μόνοι μας την εξίσωση του Einstein, μήπως θα μπορούσαμε να απελευθερώσουμε τις διαστάσεις, να το βάλουμε στον υπολογιστή ζητώντας τις ίδιες συνθήκες, για να βρούμε προς τι θα ήταν μία γενικευμένη εξίσωση του Einstein. Αυτό είναι μία πολύ ωραία προσέγγιση. Και το 2007 του επέτρεψε να βρει έναν τύπο, ο οποίος όντως γενικεύει τη θεωρία του Einstein. Όταν σ' αυτό τον τύπο θα αλλάξετε τις τιμές από το n, όπου το n είναι οι διαστάσεις, θα δείτε ότι για μερικές τιμές θα ξαναβρείτε τον τύπο του Einstein. Και θα σας εξηγήσει μία φορά την ιδιομορφία και μία φορά γιατί η εξίσωση του Einstein μηδενίζεται και γιατί δεν εμφανίζεται ένα δεύτερο σκέλος που υπάρχει στην εξίσωση του John Nash.

Η ιδέα είναι ότι δεν πρέπει να περιοριστούμε αναγκαστικά στον αριθμό διαστάσεων για να καταλάβουμε γιατί αυτό λειτουργεί καλά σε τέσσερις διαστάσεις. Άρα η ιδέα του είναι ότι απελευθερώνοντας τον αριθμό διαστάσεων, εμφανίζονται μερικά φαινόμενα μαθηματικά, δομικά φαινόμενα, που είναι πιο ισχυρά από αυτά που εμφανίζονται μόνο και μόνο στην εξίσωση πεδίου. Αυτό λοιπόν σας δίνει μια εξήγηση μαθηματική, διότι αυτή η γενικευμένη εξίσωση μετατρέπεται σε εξίσωση του Einstein, όταν βάζετε τις τέσσερις διαστάσεις. Και ερμηνεύεται βέβαια ότι το τέσσερα είναι το 3 -1, όσον αφορά τις διαστάσεις, για να έχετε το χρόνο και τη συμβολή του. Άρα θα έχετε ένα σκέλος όπου παρουσιάζεται το σύμβολο του d' Alembert, έτσι ώστε θα ερμηνεύεται πολύ σωστά. Τι θέλω να πω μ' αυτό: Ο John Nash ήρθε από εντελώς άλλη κατεύθυνση και ξαναβρέθηκε ακριβώς στην ίδια ροή. Προσπάθησε να το κοιτάξει με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο. Αλλά στο τέλος όταν βρήκε τον τύπο, αυτό αποτελεί ένα ενδιάμεσο από το πρόγραμμα Hofmann, Infeld και Einstein, που προσπαθούσαν να κάνουν αυτή την ενοποίηση.

Νομίζω ότι η θεωρία της Σχετικότητας έχει πολλά να μας πει όσον αφορά τις εξελίξεις στις εφαρμογές. Αλλά η ίδια η θεωρία της Σχετικότητας, αν πραγματικά θέλουμε να κατανοήσουμε γιατί λειτουργεί τόσο καλά – και έχουμε το ίδιο πρόβλημα και με την κβαντική θεωρία – και αν θέλουμε να τις ενοποιήσουμε, πρέπει να καταλάβουμε και δομικά πάνω σε τι βασίζονται. Εδώ βλέπετε ότι προσεγγίζοντας το πρόβλημα του Albert Einstein και μέσω του προγράμματος του John Nash, μας δίνει μια διέξοδο. Είναι ακόμα προμελέτη σε θεωρητικό στάδιο, αλλά μας δίνει μια διέξοδο. Αν θυμάστε καλά, για όσους έχουν ασχοληθεί με τη θεωρία της Σχετικότητας, χρησιμοποιείτε έναν τανυστή που θεωρείτε ότι είναι συμμετρικός και όπως είναι συμμετρικός και είναι με τέσσερις διαστάσεις, στην πραγματικότητα έχετε μόνο 10 αγνώστους, ή διαγώνια το 4, 3, 2, 1.

Η ιδέα του Einstein σε κάποια φάση ήταν να μπορεί να εισάγει μία νέα ιδέα μέσω μιας βαθμωτής θεωρίας και να καταλάβει ότι –αν τώρα υποθέσουμε ότι τελικά ο τανυστής δεν είναι συμμετρικός – έχουμε κάποια περιθώρια για να ενσωματώσουμε τη θεωρία που θα μπορούσε να εξηγήσει και αυτά τα φαινόμενα που δεν μπορεί η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Έχει ενδιαφέρον, διότι η λύση που προτείνει προς το παρόν ο John Nash γι’ αυτό το θέμα, χρησιμοποιεί την ιδέα ότι ο τανυστής δεν είναι συμμετρικός. Και γι’ αυτό το λόγο του επιτρέπει να βρει με αυτήν την εξίσωση σε υψηλότερο επίπεδο. Γιατί, για να είμαστε ειλικρινείς και να το ξέρετε, η θεωρία της Σχετικότητας είναι πολύ ωραία, θα έλεγα και όμορφη, αλλά δεν είναι πλήρη λύση. Δηλαδή αφήνει πολλά κενά. Πρέπει να τη γεμίσουμε με κάτι.

Όταν δημιουργήθηκε η θεωρία της Σχετικότητας ήταν η μεγάλη περίοδος της θερμοδυναμικής. Άρα σκέφτηκαν να τη γεμίσουν με θερμοδυναμικές ιδέες. Αν θυμάστε καλά για τη θερμοδυναμική είχαμε μερικά προβλήματα θεμελίωσης, αλλά τέλος πάντων η θερμοδυναμική λειτουργεί κλασσικά και παράγει και άλλες στατιστικές. Η ιδέα όμως είναι ότι άμα ξεπεράσουμε αυτήν την περίοδο της κυριαρχίας της θερμοδυναμικής, μήπως μπορέσουμε να γεμίσουμε το ανοιχτό πλαίσιο, την ανοιχτή δομή της θεωρίας της Σχετικότητας, με άλλες θεωρίες που μπορούν να τη συμπληρώσουν και να επιτρέπουν μία γενίκευση, όπου θα μπορούμε να εισάγουμε ένα βαθμωτό. Να καταφέρουμε να είμαστε σε μια άλλη θεωρία, άλλου τύπου, που μας επιτρέπει παρεμπιπτόντως να έρθουμε πιο κοντά και στην άλλη μεγάλη θεωρία, τη κβαντική θεωρία. Που και αυτή όπως ξέρετε παράγει μεγάλο έργο και πολλές εφαρμογές. Αλλά υπάρχει και μια θα έλεγα θεμελιακή ασυμβατότητα μεταξύ των δύο.

Η διαφορά όμως σ’ αυτά που σας είπα τα δομικά στοιχεία, είναι ότι πάνω – κάτω η κβαντική θεωρία, άμα πείτε ότι δεν επιτρέπει την τροχιά, μπορείτε να εξηγήσετε πάρα πολλά πράγματα που δεν επιτρέπει, που δεν έχουν πια νόημα. Ενώ στη θεωρία της Σχετικότητας ανατρέπουμε πολλά δεδομένα, αυτά που σας είπα, δηλαδή τους μετασχηματισμούς, τις γωνίες, τις απεικονίσεις, το πεδίο πώς μπορεί να λειτουργήσει χωρίς δύναμη, άρα μιλάμε μόνο για το χωροχρόνο, η ερμηνεία του χωροχρόνου, η συστολή - διαστολή. Όταν κοιτάζουμε ένα μήκος και λέμε ότι όταν πάμε πιο γρήγορα, στη θεωρία της Σχετικότητας πολύ συχνά ακούω εγώ αυτή την έκφραση ότι το μήκος μειώνεται. Στην πραγματικότητα, όταν ήσαστε στο χωροχρόνο του Minkowski, αυτό είναι απλώς μια περιστροφή. Όπου υπάρχει κι ένα φανταστικό μέρος, όπου όταν θα κάνετε την προβολή έχετε την εντύπωση ότι είναι πιο μικρό. Άρα είναι και θέμα ερμηνείας.

Αυτό σας το λέω, διότι όταν κάνουμε προβολές και προσπαθούμε να τα εξηγήσουμε όλα με μια Νευτωνική σκέψη, αρχίζουμε να έχουμε μερικά προβλήματα. Αυτά τα προβλήματα όταν είναι παράδοξα μπορούμε να τα επιλύσουμε όταν ξαναμπαίνουμε στο πλαίσιο της θεωρίας. Η θεωρία της Σχετικότητας, όπως έχει ειπωθεί, είναι πολύ καλά δομημένη, αλλά είναι ανοιχτή δομή. Δηλαδή επιτρέπει να τη συμπληρώσουμε και νομίζω ότι αυτές θα πρέπει να είναι οι προσπάθειες από τους θεωρητικούς και τους μαθηματικούς. Για να μπορούμε να δούμε ότι έχοντας αυτόν το σκελετό, πώς μπορούμε να πάμε πιο πέρα, έτσι ώστε αυτό το πλαίσιο να είναι συμβατό και με την άλλη μεγάλη θεωρία.

Σας ευχαριστώ.